Compléments d'algèbre linéaire

Travaux dirigés #01

Partie A – Matrices

Exercice 1 — Soient a et b deux nombres complexes et $A = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} a & \text{si } i \neq j \\ b & \text{si } i = j \end{cases}$$

1. Calculer A^m pour $m \in \mathbb{N}$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice A soit inversible et donner alors son inverse.

Exercice 2 — On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -6 & 4 & 10 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de la matrice M ?
2. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes U, V tels que $M = UV^T$.
3. En déduire M^2 puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 — Matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est une matrice nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$. Si une matrice A non nulle est nilpotente, on appelle indice de nilpotence de A l'entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.

1. Trouver une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice n.
2. Montrer qu'en général, la somme de deux matrices nilpotentes n'est pas nilpotente.
3. Montrer que si A, B sont deux matrices nilpotentes qui commutent alors $A+B$ et AB sont nilpotentes.
4. Montrer que si A est nilpotente d'indice n, alors $\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 4 — Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans cet exercice, I désigne la matrice identité d'ordre 3 et 0_3 la matrice nulle d'ordre 3. On se propose de calculer les puissances de A de plusieurs manières.

1. *Par diagonalisation*

   On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Démontrer que P est inversible et donner son inverse.
   b) Calculer $D = P^{-1}AP$, D^n puis A^n.
   c) Montrer que D est inversible et en déduire que A est inversible.
   En déduire alors l'expression de A^{-n} en fonction de n, où n est un entier naturel.

2. *Par la formule du binôme de Newton*

   a) Soit $B = A - 2I$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer B^n en fonction de B.
   b) En utilisant la formule du binôme, calculer l'expression de A^n en fonction de n, A et I.

3. *Par polynôme annulateur*

   a) Montrer que $A^2 - 3A + 2I = 0_3$.
   b) Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier n,

   $$A^n = a_n A + b_n I$$

   Donner les relations de récurrence vérifiées par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner a_n et b_n en fonction de n.
   INDICATION : *Quelle relation de récurrence vérifie $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?*
   En déduire l'expression de A^n en fonction de n, A et I.
   c) Justifier que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 5 — Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et lorsqu'elles le sont, calculer leur inverse. Déterminer leur rang.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 — On considère les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3w_n \\ v_{n+1} = v_n \\ w_{n+1} = -u_n + 2v_n - 2w_n \end{cases}$$

Exprimer le terme général de ces trois suites en fonction de n.
INDICATION : *On pourra (par exemple) utiliser le fait qu'une certaine matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie l'égalité $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0$.*

Exercice 7 — On considère la matrice à coefficients réels suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A, B et C appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et enfin,

$$M = \begin{pmatrix} I_n & A & C \\ 0 & I_n & B \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{K})$$

Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Partie B – Espaces vectoriels

Exercice 9 — On peut définir les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ par la donnée :

- d'équations cartésiennes :

$$A = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - t = 0, x + 2z = 0\right\}.$$

- d'un paramétrage :

$$B = \left\{(2a - b + 2c, 3a + 2b - c, -b + c, c) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

- d'une famille génératrice :

$$C = \mathrm{Vect}\,((0, -1, 2, 1), (1, 2, 1, 0))$$

Écrire chacun de ces ensembles sous les trois formes possibles.

Exercice 10 — Montrer que l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 11 — Déterminer l'ensemble des valeurs de $m \in \mathbb{R}$ telles que :

$$u = (m, 1, m) \in \mathrm{Vect}(v, w) \text{ avec } v = (1, 1, 1) \text{ et } w = (1, m, -1)$$

Exercice 12 — Soit $\left(e_1, \ldots, e_p\right)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$-e.v. E.

1. On pose $u_i = e_1 + \cdots + e_i$ pour tout entier i compris entre 1 et p.
   La famille $\left(u_1, \ldots, u_p\right)$ est-elle libre?
2. Reprendre la question avec $v_k = e_k - e_{k+1}$ si $k \in [\![1, p-1]\!]$ et $v_p = e_p$.

Exercice 13 —

1. Montrer que la famille $\left((X - \lambda)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$.
2. Déterminer les coordonnées de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans cette base.

Exercice 14 — On considère les trois suites complexes définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1\,; \quad v_n = j^n\,; \quad w_n = \overline{j}^n$$

Montrer que la famille $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre.

Exercice 15 — Montrer que les trois familles $(x \mapsto \cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}$, $(x \mapsto \cos^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x \mapsto \mathrm{e}^{nx})_{n\in\mathbb{N}}$ sont libres dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 16 — Déterminer un supplémentaire de :

1. $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0, x - y + z + 2t = 0\right\}$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. $G = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\right\}$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.
3. $H = \left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\right\}$ dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 17 — Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18 — Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de $\mathbb{R}^n$ où $n \geqslant 2$.
Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$.

Exercice 19 — Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et F un s.e.v. distinct de E.

1. Montrer que si H est un hyperplan de E ne contenant pas F, alors $\dim(F \cap H) = \dim(F) - 1$.
2. Montrer que F peut s'écrire comme une intersection d'un nombre fini d'hyperplans.
3. Quel est le nombre minimum d'hyperplans nécessaires ?

Exercice 20 — Soit $E = \mathscr{C}([-2,2],\mathbb{R})$ et $F = \left\{f \in E \mid \forall k \in [\![-2,2]\!]\ f(k) = 0\right\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel. Est-il de dimension finie ?
2. Montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $[-2,2]$ de degré au plus 4 est un supplémentaire de F dans E.

Partie C – Applications linéaires

Exercice 21 — Soit (e_1,e_2,e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel.
Démontrer que la donnée de $f(e_1) = e_1+e_2, f(e_2) = e_1-e_2$ et $f(e_3) = e_1+\lambda e_3$ permet de définir un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Comment choisir λ pour que f soit injective ? surjective ?

Exercice 22 — Soient $E = \mathbb{R}^3$ et f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (4x+y-z, 2x+3y-z, 2x+y+z)$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ puis construire sa matrice représentative dans la base canonique.
2. Trouver deux réels distincts λ et μ tels que $f - \lambda \mathrm{id}_E$ et $f - \mu \mathrm{id}_E$ ne soient pas des automorphismes.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E)$.
4. Déterminer la matrice représentative de f dans une base adaptée à la somme directe précédente.

Exercice 23 — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\psi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}\right.$

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. a) Exprimer le degré de $\psi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
   b) Déterminer $\mathrm{Im}(\psi)$ et $\mathrm{Ker}(\psi)$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n.
   Montrer que $(P, \psi(P), \psi^2(P), \ldots, \psi^n(P))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. a) Soient $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :
   $$P(X+1) - P(X) = Q(X) \quad \text{et} \quad P(0) = 0$$
   b) Déterminer un tel polynôme P pour $Q = X(X+1)(X+2)$ et en déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)$.

Exercice 24 — Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P) = (X+1)P(X) - XP(X+1)$.

1. L'application ϕ définit-elle un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
2. Déterminer le noyau de ϕ.
3. L'application est-elle surjective ?

Exercice 25 — On considère l'application φ définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = AM \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et construire sa matrice dans la base canonique.

Exercice 26 — Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et f un endomorphisme de E tel que pour tout $u \in E$, $(u, f(u))$ est liée. Montrer que f est une homotéthie.

Exercice 27 — Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.
2. Montrer que $f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 28 — Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $g\circ f = f\circ g$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

Exercice 29 — Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie n et $f\in\mathscr{L}(E,F)$ tels qu'il existe $g\in\mathscr{L}(F,E)$ vérifiant $g\circ f=\mathrm{id}_E$.
Montrer que f est injective, g surjective puis conclure.

Exercice 30 — Soient E,F et G trois $\mathbb{K}$-e.v. et deux applications linéaires $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $g\in\mathscr{L}(F,G)$.

1. Montrer que : $\operatorname{Ker}(g\circ f)=\operatorname{Ker} f \iff \operatorname{Ker} g\cap\operatorname{Im} f=\{0_F\}$
2. Montrer que : $\operatorname{Im}(g\circ f)=\operatorname{Im} g \iff \operatorname{Ker} g+\operatorname{Im} f=F$

Exercice 31 — Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f\in\mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que : $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} f^2 \iff \operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f=\{0_E\}$
2. Montrer que : $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2 \iff E=\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} f$
3. En déduire qu'en dimension finie,

$$\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} f^2 \iff \operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2 \iff E=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f$$

Exercice 32 — On note $E=\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ et f un endomorphisme non nul de E tel que $f^3+f=0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. On suppose que f est injective.
   a) Montrer que $f^2=-\mathrm{id}_E$.
   b) En déduire que $(e_1,f(e_1))$ est une famille libre.
   c) Trouver alors une contradiction en considérant une base de la forme $(e_1,f(e_1),u)$ et en conclure que $\operatorname{Ker}(f)\neq\{0_E\}$.
2. Justifier alors que $\dim(\operatorname{Ker}(f))\in\{1,2\}$.
3. Montrer que : $E=\operatorname{Ker}(f)\oplus\operatorname{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$.
4. On pose $F=\operatorname{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$ et on note u un vecteur non nul de F.
   a) Montrer que $f(u)\in F$ et que $(u,f(u))$ est libre.
   b) En déduire que $\dim(\operatorname{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E))=2$ et $\dim(\operatorname{Ker}(f))=1$.
   c) On considère v un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(f)$.
   Montrer que $\mathscr{B}'=(v,u,f(u))$ est une base de E.
   d) Donner la matrice représentative de f dans $\mathscr{B}'$.

Exercice 33 — Soit E un espace de dimension finie $2p$ avec $p\geqslant 1$ et $\varphi\in\mathscr{L}(E)$.
Montrer qu'il y a équivalence entre les propriétés :

(i) $\varphi^2=0$ et $\operatorname{rg}(\varphi)=p$ (ii) $\operatorname{Im}(\varphi)=\operatorname{Ker}(\varphi)$

(iii) $\exists A\in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $\begin{pmatrix}0 & A\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ soit la matrice de φ dans une certaine base.

Exercice 34 — Endomorphismes nilpotents
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n. On suppose que $f\in\mathscr{L}(E)$ est nilpotente, d'indice de nilpotence p, c'est-à-dire que : $f^p=\tilde{0}$ et $f^{p-1}\neq\tilde{0}$.

1. Montrer qu'il existe $x_0\in E$ tel que $\mathscr{F}=(x_0,f(x_0),\dots,f^{p-1}(x_0))$ est libre.
   En déduire que $p\leqslant n$.
2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E obtenue en complétant la famille $\mathscr{F}$.
   Quelle est la forme de la matrice de f dans cette base ?
3. Que peut-on dire de la suite $(\operatorname{rg}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$?
4. L'application f est-elle diagonalisable ?

Exercice 35 — Trouver toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la condition :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=5u_n-2\cdot 3^n$$

Partie D – Projecteurs et symétries vectoriels

Exercice 36 — Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices :

$$M=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 2 & 4\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad N=\begin{pmatrix}3 & 4 & 4\\ -1 & -1 & -2\\ -1 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

Montrer que f est une projection vectorielle et g une symétrie vectorielle ; déterminer leurs caractéristiques géométriques.

Exercice 37 — On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique (e_1,e_2,e_3). On considère le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équations respectives :

$$\mathscr{P}: x+y+z=0 \qquad \mathscr{D}:\begin{cases}x-y+z=0\\ x+y+2z=0\end{cases}$$

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection p sur le plan $\mathcal{P}$ parallèlement à la droite $\mathcal{D}$.
2. Faire de même avec la symétrie s par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.

Exercice 38 — Soient E un espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes de E tels que $f+g=\mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)\leqslant n$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g)=\mathrm{Im}(f)$.
2. Que peut-on en déduire concernant $g\circ f$?
3. Montrer que f et g sont des projecteurs.

Exercice 39 — Soit p et q deux projecteurs.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur ssi $p\circ q+q\circ p=0_{\mathscr{L}(E)}$.
2. En déduire que $p+q$ est un projecteur ssi $p\circ q=q\circ p=0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 40 — Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et p,q deux projecteurs de E vérifiant $p\circ q=0$. On pose $r=p+q-q\circ p$.

1. Montrer que r est un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\, r=\mathrm{Ker}\, p\cap\mathrm{Ker}\, q$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}\, r=\mathrm{Im}\, p\oplus\mathrm{Im}\, q$.

Exercice 41 — Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et p,q deux projecteurs de E tels que $p\circ q=q\circ p$.

1. Montrer que $p\circ q$ est un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\, p\circ q=\mathrm{Im}\, p\cap\mathrm{Im}\, q$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\, p\circ q=\mathrm{Ker}\, p+\mathrm{Ker}\, q$.

Exercice 42 — Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. finie.

1. Si $f\circ g\circ f=f$, montrer que $f\circ g$ et $g\circ f$ sont des projecteurs et que :
$$\mathrm{Ker}(g\circ f)=\mathrm{Ker}(f)\ \text{et}\ \mathrm{Im}(f\circ g)=\mathrm{Im}(f)$$
2. Montrer que deux quelconques des propriétés suivantes entraînent la troisième :
$$\text{(a)}\ \ f\circ g\circ f=f\qquad\text{(b)}\ \ g\circ f\circ g=g\qquad\text{(c)}\ \ \mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}(g)$$