Courbes

Travaux dirigés #08

Partie A – Courbes paramétrées

Exercice 1 — Tracer les courbes suivantes, décrites par le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$:

① $\begin{cases} x(t) = t\ln t \\ y(t) = \dfrac{\ln t}{t} \end{cases}$ ② $\begin{cases} x(t) = \dfrac{\ln|t|}{t-1} \\ y(t) = \ln\left|t + \dfrac{1}{t}\right| \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x(t) = \cos 3t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$

④ $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+1}{2t} \\ y(t) = \dfrac{2t-1}{t^2} \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x(t) = \tan t + \sin t \\ y(t) = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$ ⑥ $\begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = 2t - \dfrac{1}{t} \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$ ⑧ $\begin{cases} x(t) = t - \dfrac{1}{t} \\ y(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \end{cases}$ ⑨ $\begin{cases} x(t) = \cos\left(\dfrac{3t}{2}\right) \\ y(t) = 2\sin(t) + \cos(2t) \end{cases}$

Exercice 2 — Tracer la courbe d'équation cartésienne :

$$x^4 + y^4 + 2x^3 + x(x+y) = 0$$

INDICATION : *On pourra utiliser le faisceau de droites $D_t : y = tx$.*

Exercice 3 — Astroïde

1. Étudier et représenter l'astroïde de paramétrage (pour $a > 0$) :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos^3(t) \\ y(t) = a\sin^3(t) \end{cases}$$

2. Déterminer l'orthoptique de l'astroïde, *i.e.* l'ensemble des points du plan par lesquels passent deux tangentes de l'astroïde orthogonales entre elles.

Exercice 4 — Strophoïde droite

1. Construire la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = t\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels t_1, t_2 et t_3 pour que les points $M(t_i)$ de $\mathscr{C}$ soient alignés.

Exercice 5 — Cardioïde

La plan affine euclidien orienté usuel est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier la cardioïde définie par le paramétrage :

$$\begin{cases} x(t) = a(1+\cos t)\cos t \\ y(t) = a(1+\cos t)\sin t \end{cases}$$

On la représentera pour $a = 1$.

2. Déterminer la podaire du cercle de centre $(a, 0)$ et de rayon a par rapport au point O, *i.e.* le lieu des projections orthogonales de O sur les tangentes du cercle.

Exercice 6 — Montrer que la courbe Γ paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = (t+1)\mathrm{e}^t \\ y(t) = t^2\mathrm{e}^t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

admet un seul point non régulier et tracer l'allure de Γ au voisinage de ce point.

Partie B – Étude métrique des courbes planes

Exercice 7 — Calculer la longueur L de la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln\sin t \\ y(t) = \sin t\cos t \end{cases}$$

entre les deux points de rebroussement.

Exercice 8 — Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et Γ la cycloïde de paramétrage :

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

Calculer la longueur L d'une arche de Γ.

Exercice 9 — Spirale logarithmique
Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on note f la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\cos(t) \\ y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\sin(t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

1. Calculer l'abscisse curviligne d'origine 0 de f.
2. Déterminer le repère de Frenet associé à f.
3. Calculer la courbure de f.
4. Déterminer la développée de f et l'interpréter géométriquement.

Exercice 10 — On pose, pour tout $t \in]-\pi, \pi[$:

$$\begin{cases} x(t) = t + \sin(t) \\ y(t) = 1 + \cos(t) \end{cases}$$

1. a) Trouver α tel que le vecteur tangent au point de paramètre t puisse s'écrire sous la forme $\begin{pmatrix} \cos\alpha(t) \\ \sin\alpha(t) \end{pmatrix}$.
   b) En déduire la courbure.
2. Calculer directement la courbure.

Exercice 11 — Soit $\alpha > 0$. On pose alors :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^\alpha \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}_+^*)$$

On pose alors $f : t \mapsto (x(t), y(t))$ que l'on prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = (0,0)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du support de f.
2. Montrer que la courbe possède une tangente au point de paramètre 0 dont on déterminera un vecteur directeur. À quelle condition cette tangente est-elle dirigée par $(1,0)$? On se placera désormais dans ce cas.
3. Calculer la courbure de f sur $\mathbb{R}_+^*$ puis son rayon de courbure. Vers quelle limite ce rayon de courbure tend-il en 0 ? Interpréter.

Exercice 12 — On considère la courbe Γ paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = t + \sin(t) - 4\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \\ y(t) = 3 + \cos(t) - 4\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

1. Construire la courbe Γ.
2. Expliciter une abscisse curviligne et calculer la longueur de l'arc reliant les points $M(0)$ et $M(4\pi)$.
3. Pour $t \in]0, 4\pi[$, préciser le repère de Frenet et le rayon de courbure de Γ au point de paramètre t.
4. Construire la développée de Γ.

Exercice 13 — Construire la développée de l'ellipse paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Exercice 14 — Construire la courbe Γ ainsi que sa dévelopée.

$$(\Gamma) : \begin{cases} x(t) = (1 + \cos^2(t))\sin(t) \\ y(t) = \sin^2(t)\cos(t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Exercice 15 — Néphroïde
Soit la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos(t) - \cos(3t) \\ y(t) = 3\sin(t) - \sin(3t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Étudier la courbe et montrer que sa développée peut être obtenue par composition d'une homothétie et d'une rotation.

Exercice 16 — Déterminer l'ensemble des centres de courbure au point O des courbes intégrales de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y''-xy'-2y=1$$

telles que $y(0)=0$.

Partie C – Enveloppes d'une famille de droites

Exercice 17 — On considère le segment de longueur $a>0$ d'extrémités $A\in(Ox)$ et $B\in(Oy)$. Déterminer l'enveloppe de la droite (AB).

Exercice 18 — Déterminer l'enveloppe de la famille des droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ dont on donne une équation cartésienne :

$$(1-t^2)x+2ty-(1+t^2)=0$$

$$(t-2)x+(3t-2t^2)y+t^3=0$$

Exercice 19 — Soit $\mathcal{P}$ une parabole d'équation $y^2=2px$. Montrer que le cercle de courbure en un point M de $\mathcal{P}$ autre que son sommet recoupe $\mathcal{P}$ en un point Q. Caractériser l'enveloppe de la droite (MQ).

Exercice 20 — Soient $\mathcal{H}$ la courbe d'équation $xy=1$ et A,B deux points de $\mathcal{H}$ d'abscisses double l'une de l'autre. Déterminer l'enveloppe de (AB).

Exercice 21 — Soient $t\in\mathbb{R}$, $P(\cos t,0)$ et $Q(0,\sin(t))$.
Déterminer l'enveloppe de la médiatrice de (PQ).