D | Dénombrement

« Il n'y a rien de plus triste qu'une vie sans hasard. »
Honoré de Balzac

Plan de cours

I | Ensemble fini et cardinal

A – Cardinal d'un ensemble fini

Définition D.1

On dit qu'un ensemble E est un ensemble fini s'il est vide ou s'il existe un entier naturel n non nul et une bijection de E dans $[\![1, n]\!]$. L'entier n est alors appelé cardinal de E et noté (au choix) : $\text{card}(E)$, $|E|$ ou bien $\#E$. Par convention, $\text{card}(\varnothing) = 0$.

Le cardinal d'un ensemble fini correspond intuitivement à son nombre d'éléments.

Exemple

Si $E = \{a, b, c\}$ avec a, b et c distincts, $\text{card}(E) = 3$. En effet, on peut considérer la bijection suivante :

$$f : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\} \quad \text{avec} \quad f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3$$

Il peut exister plusieurs bijections (il y en a exactement $n!$ comme nous le verrons plus tard) mais l'entier n est unique. Donner une telle bijection revient à énumérer (compter) les éléments de E. Si E contient n éléments, on pourra poser :

$$E = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

En pratique, on donnera rarement une telle bijection pour déterminer le cardinal d'un ensemble fini mais cette idée est à garder en tête pour le cours de deuxième année.

Exercice 1

Déterminer le cardinal de E dans les trois cas suivants pour $n \in \mathbb{N}$ et $p, q \in \mathbb{Z}$:

$$E = [\![1, n]\!]; \quad E = [\![-n, n]\!]; \quad E = [\![p, q]\!] \quad \text{avec} \quad p \leqslant q$$

Théorème D.2

Deux ensembles finis E et F ont même cardinal si et seulement s'il existe une bijection de E dans F.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soient $\varphi : E \to [\![0,n]\!]$ et $\psi : F \to [\![0,n]\!]$ deux bijections.
L'application $\psi^{-1} \circ \varphi : E \to F$ est bijective comme composée de bijections.
$\boxed{\Longleftarrow}$ E est un ensemble fini donc il existe $\varphi : E \to [\![1,n]\!]$ bijective avec $n = \text{card}(E)$. Notons θ une bijection de E dans F. $\varphi \circ \theta^{-1} : F \to [\![1,n]\!]$ est une bijection donc F est de cardinal n. ■

B – Propriétés

Théorème D.3

Soient E et F deux ensembles finis disjoints (c'est-à-dire $E \cap F = \varnothing$).
$E \cup F$ est alors un ensemble fini et $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$.

On en déduit par récurrence le corollaire suivant :

Corollaire D.4

Si $E_1, \ldots, E_n$ sont n ensembles deux à deux disjoints, alors $E_1 \cup \ldots \cup E_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ est un ensemble fini et :

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{card}(E_k)$$

Proposition D.5

Soit $F \subset E$ avec E est un ensemble fini. Alors F est un ensemble fini et $\text{card}(F) \leqslant \text{card}(E)$.
De plus, $\text{card}(F) = \text{card}(E)$ si et seulement si $F = E$.

S'en suivent un certain nombre de propriétés.

Proposition D.6

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble fini E. On a alors :

(i) $\text{card}\left(\overline{A}\right) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$;
(ii) $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$;
(iii) $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$;
(iv) $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$.

Démonstration

Des dessins sont souvent plus utiles que des formules compliquées !

(i) A et $\overline{A}$ sont disjoints et on a $E = A \cup \overline{A}$, donc $\text{card}(E) = \text{card}(A) + \text{card}(\overline{A})$;
(ii) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ et l'union est disjointe (là encore, faire un dessin) ;
(iii) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ et l'union est disjointe.
On a donc $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \setminus A)$
$= \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$;
(iv) Le principe est identique. ■

Exemples

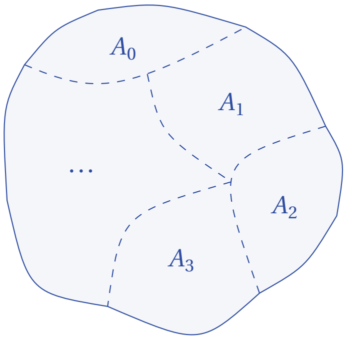
• Dans une classe, 25 élèves suivent des cours d'anglais, 12 des cours d'espagnols et 8 les deux cours de langues. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ? *Il y a 29 élèves.*
• Dans une classe de 36 élèves, 22 élèves pratiquent l'anglais, 18 l'espagnol, 22 l'allemand, 10 suivent les cours d'anglais/allemand, 9 d'allemand/espagnol et enfin 11 d'anglais/espagnol. Combien d'élèves pratiquent trois langues vivantes ? *Il y a 4 élèves réellement motivés par les langues.*

Définition D.7 : Partition d'un ensemble

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle partition d'un ensemble E la donnée de n parties $A_1, \dots, A_n$ de E telles que :

(i) $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

(ii) $\forall i, j \in [\![1, n]\!]\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$



Représentation d'une partition

Lemme D.8 : Principe des bergers

Soit $A_1, \dots, A_n$ une partition d'un ensemble fini E.
On suppose que tous ces ensembles ont même cardinal k. On a alors $\text{card}(E) = nk$.

Exemple

Un berger peut connaître le nombre de pattes dans son troupeau en comptant le nombre de moutons, cette formule ne dit rien de plus. Réciproquement, il « suffit » de compter le nombre de pattes dans le troupeau pour connaître le nombre de moutons !

Proposition D.9

On considère deux ensembles finis E et F.
Le produit cartésien $E \times F$ est un ensemble fini et $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Démonstration

Par définition, $E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}$.
Notons n le cardinal de E et m celui de F. On peut alors écrire :

$$E = \{x_1, \dots, x_n\} \text{ et } F = \{y_1, \dots, y_m\}$$

$\{x_i\} \times F = \{(x_i, y) \mid y \in F\}$ donc $\text{card}(\{x_i\} \times F) = \text{card}(F) = m$.

Comme $E \times F = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} \times F = \bigsqcup_{i=1}^{n} \{x_i\} \times F$, on trouve :

$$\text{card}(E \times F) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}(\{x_i\} \times F) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}(F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$$

■

Corollaire D.10

Si $E_1, \dots, E_n$ sont n ensembles fini, alors $E_1 \times \ldots \times E_n = \prod_{k=1}^{n} E_k$ est un ensemble fini et $\text{card}\left(\prod_{k=1}^{n} E_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \text{card}(E_k)$.

En particulier, $\text{card}(E^p) = \text{card}(E)^p$. Un élément de E^p, donc de la forme $(x_1, \dots, x_p)$, est appelé p-uplet ou p-liste.

Exemples

On tire successivement avec remise des cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Quel est le nombre de possibilités de tirer un roi puis une dame lors de deux tirages ?
Ce sont tous les couples de la forme (R,D) *soit 16 possibilités.*
2. Quel est le nombre de possibilités de tirer un roi puis une dame puis un pique lors de trois tirages ?
De même, les tirages s'effectuant avec remise, il y a 128 possibilités.

C – Cardinal et applications

Théorème D.11

Soient E et F deux ensembles finis.

(a) S'il existe une injection de E dans F alors $\text{card}(E) \leqslant \text{card}(F)$.

(b) S'il existe une surjection de E dans F alors $\text{card}(E) \geqslant \text{card}(F)$.

(c) S'il existe une bijection de E dans F alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.

Démonstration

Le dernier résultat a déjà été démontré.

(a) Soit $f : E \to F$ une injection. $f(E) \subset F$ donc $\text{card}(f(E)) \leqslant \text{card}(F)$.
De plus, $f : E \to f(E)$ est bijective donc $\text{card}(E) = \text{card}(f(E))$ et on a bien $\text{card}(E) \leqslant \text{card}(F)$.

(b) Soit $f : E \to F$ une surjection. On a $f(E) = F$ donc $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F)$.
Comme on a toujours $\text{card}(f(E)) \leqslant \text{card}(E)$, $\text{card}(E) \geqslant \text{card}(F)$. ■

On notera que les réciproques des trois énoncés sont également vraies.

D – Cardinal de l'ensemble des parties

Proposition D.12 : Cardinal de l'ensemble des parties

Si E est un ensemble fini de cardinal n, $\text{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.

Démonstration (à bien comprendre, à l'aide d'un dessin)

Procédons par récurrence sur le cardinal de E.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, $E = \varnothing$ et $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing\}$ donc $\text{card}(\mathscr{P}(E)) = 1 = 2^0$.
De même, pour $n = 1$, $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, E\}$ donc $\text{card}(\mathscr{P}(E)) = 2 = 2^1$.
- **Hérédité** : Supposons le résultat vrai à un rang n donné.
Soit E un ensemble de cardinal $n+1$ et $x \in E$. On peut écrire $E = (E \setminus \{x\}) \cup \{x\}$.
Les parties de E sont de deux types : il y a les parties de $E \setminus \{x\}$ (2^n en tout par hypothèse de récurrence) et les parties de $E \setminus \{x\}$ auxquelles on ajoute x (2^n également).
Ainsi, $\text{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.
- D'après le principe de récurrence, le résultat est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

II | Dénombrement

A – Modélisation

Dénombrer, c'est calculer le cardinal d'un ensemble. Pour effectuer un dénombrement, on pourra associer à une situation donnée (à un *événement*) un mot, c'est-à-dire une suite de symboles ou un p-uplet, ou bien un sous-ensemble donné. Cette étape de modélisation est essentielle dans le calcul de probabilités.

Exemples

• Une urne contient des boules noires et des boules blanches. Le tirage successif d'une boule blanche, puis d'une boule noire et enfin d'une boule blanche peut être représenté par le mot BNB. L'ensemble des tirages possibles de trois boules est alors : $\{BBB, NBB, BNB, NNB, NBN, BBN, BNN, NNN\}$.
On constate qu'il y a $8 = 2 \times 2 \times 2$ possibilités.
• On pioche cinq cartes simultanément parmi un jeu de 32 cartes. Une « main » possible est : $\{\text{As}\heartsuit, \text{R}\clubsuit, 8\clubsuit, \text{D}\diamondsuit, 9\heartsuit\}$.
Noter que contrairement au cas précédent, l'ordre n'a pas d'importance et la main $\{\text{R}\clubsuit, \text{As}\heartsuit, \text{D}\diamondsuit, 8\clubsuit, 9\heartsuit\}$ est identique.

Une fois le problème correctement posé, la résolution se ramènera au calcul du cardinal d'un ensemble bien identifié. On dispose à ce stade du cours de formules liées à l'union ou le produit de deux ensembles ; voici d'autres résultats forts utiles.

B – Arrangements

On considère désormais un ensemble fini E à n éléments et un entier naturel p.

Définition D.13 : Arrangement

On appelle arrangement de p éléments de E un p-uplet $(x_1,\dots,x_p)$ constitué d'éléments de E deux à deux distincts, c'est-à-dire vérifiant la condition : $\forall i,j\in[\![1,p]\!]\quad i\neq j \Longrightarrow x_i\neq x_j$.

Exemple

Si $E=\{1,2,3\}$, les arrangement de 2 élements de E sont $(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1)$ et $(3,2)$.

Théorème D.14 : Nombre d'arrangements

On suppose que $1\leqslant p\leqslant n$.

Le nombre d'arrangements de p éléments de E vaut $\dfrac{n!}{(n-p)!}=n\times(n-1)\times\dots\times(n-p+1)$.

C'est le nombre de façons de choisir p éléments ordonnés parmi n.

Démonstration

On peut procéder par récurrence ou, plus simplement de la façon suivante.
Choisir un arrangement $(x_1,\dots,x_p)$ de E revient à choisir x_1 parmi n éléments, puis x_2 parmi $n-1$ éléments, …, jusqu'à choisir x_p parmi les $n-p+1$ éléments restants. Au final, $n\times(n-1)\times\dots\times(n-p+1)$ possibilités. ■

Exemple

Une association comportant 27 membres doit élire un président, un secrétaire et un trésorier. Quel est le nombre de possibilités ? *Tout simplement* $27\times26\times25$.

C – Permutations

Définition D.15 : Permutation

On appelle permutation de E un arrangement de E à n éléments.

Exemple

Si $E=\{1,2,3\}$, les permutations de E sont $(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2)$ et $(3,2,1)$.

Théorème D.16 : Nombre de permutations

Le nombre de permutations de l'ensemble E est $n!$.

Démonstration

Cela revient à choisir n éléments parmi n, et ceci de façon ordonnée. ■

À chaque permutation $(x_1,\dots,x_n)$ de E, on peut associer de manière unique l'application $f:[\![1,n]\!]\to E$ définie par $f(i)=x_i$. L'application étant injective, elle est bijective ; d'où le résultat suivant.

Proposition D.17

Il y a $n!$ bijections de E dans E.

Exercice 2

Combien existe-t-il d'anagrammes du mot *MER*? du mot *AMANDE*?
Il y a $3! = 6$ *anagrammes pour le mot* MER. *Pour* AMANDE, *les choses sont plus complexes puisque la lettre* A *se répète et que permuter les deux* A *dans un anagramme donné nous redonne le même mot. Finalement, autant compter le nombre de positions possibles des lettres A dans un mot de 6 lettres : 15 possibilités, c'est-à-dire* $\binom{6}{2}$ *en anticipant un peu. Reste à compléter ce mot avec les 4 lettres distinctes restantes, soit* $4!$ *possibilités. On trouve donc* $15 \times 24 = 360$ *possibilités.*

D – Combinaisons

E est toujours un ensemble fini à n éléments et p un entier naturel.

Définition D.18 : Combinaison

On appelle combinaison de p éléments de E un sous-ensemble de E contenant p éléments.

Dans une combinaison, il n'y a pas d'ordre des éléments contrairement aux p-uplets.

Exemple

Si $E = \{1, 2, 3\}$, les combinaisons de E à deux éléments sont : $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$.

Théorème D.19 : Nombre de combinaisons

On suppose que $1 \leqslant p \leqslant n$.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E vaut $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démonstration

Pour construire une combinaison $\{x_1, \ldots, x_p\}$, on peut choisir x_1 parmi n éléments, puis x_2 parmi $n-1$ éléments, ..., jusqu'à x_p parmi les $n-p+1$ éléments restants soit $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ possibilités.
Seulement, contrairement à un arrangement, l'ordre ne compte pas. La combinaison $\{x_1, \ldots, x_p\}$ a donc été comptée plusieurs fois, autant de fois qu'il y a de permutations de l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_p\}$, soit $p!$ fois.
On a donc $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ combinaisons possibles. ■

Proposition D.20 : Propriétés des coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}$ et un entier $p \in [\![1, n]\!]$.

(i) $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n$ (ii) $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

(iii) $\displaystyle p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$ (iv) $\displaystyle\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Démonstration

Il s'agit ici de présenter une preuve combinatoire de résultats que l'on peut établir de façon calculatoire.

(i) Il y a un choix possible quand on tire 0 bille parmi n (ne rien faire), $\displaystyle\binom{n}{0} = 1$.

Il y a n choix possibles quand on tire 1 élément parmi n donc $\displaystyle\binom{n}{1} = n$.

(ii) Choisir p éléments parmi n revient à choisir de laisser de côté les $n-p$ autres donc on a $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

(iii) Il y a $p\binom{n}{p}$ façon de choisir p éléments parmi n puis un élément parmi ceux-là. Cela revient exactement à choisir un élement parmi les n puis à « compléter » en choisissant $p-1$ éléments parmi les $n-1$ restants. Ce qui nous donne bien la formule annoncée !

(iv) Soient E un ensemble à n éléments et $x \in E$. Les parties de E à p éléments sont de deux types : celles qui contiennent x et sont constituées de $p-1$ autres éléments choisis parmi les $n-1$ restants ; celles qui ne contiennent pas x et qui sont constituées de p éléments choisis parmi les $n-1$ restants. Elles forment deux ensembles disjoints donc $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}$.

(v) Toute partie de E étant une combinaison de E, les ensembles de combinaisons de p éléments de E constituent une partition de $\mathscr{P}(E)$, ce qu'on peut écrire sous la forme $\mathscr{P}(E)=\bigsqcup_{p=1}^{n}\mathscr{C}^p(E)$ où $\mathscr{C}^p(E)$ désigne l'ensemble des combinaisons de p éléments.
En passant au cardinal, on obtient l'égalité demandée. ■

Dans le dernier point, la notation « $\sqcup$ » est une façon d'indiquer que l'on considère la réunion d'ensembles disjoints.

On remarquera que pour $p > n$, $\binom{n}{p}=0$. En effet, on ne peut pas construire d'ensemble à p éléments avec seulement n éléments.

Exemple 1

On dispose d'un jeu classique de 32 cartes et on en distribue 8 à 4 joueurs.

- Combien y a-t-il de jeux possibles par un joueur ?

  Cela revient à choisir 8 cartes parmi 32, soit $\binom{32}{8}=328\,696$ *possibilités.*

- Combien y a-t-il de jeux contenant 6 cartes rouges ?

  Cela revient à choisir 6 cartes rouges parmi les 16 contenues dans le jeu puis à choisir 2 cartes noires parmi les 16 contenues dans le jeu, soit $\binom{16}{6}\times\binom{16}{2}=960\,960$ *possibilités.*

Exemple 2

Démontrer la formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{n+m}{p}$.

- Si $p > n+m$ alors l'égalité $0=0$ est bien vérifiée.
- Si $p \leqslant n+m$, on considère deux ensembles disjoints E et F de cardinal n et m. Choisir p éléments parmi les $n+m$ éléments de $E \cup F$ revient à choisir k éléments parmi les n éléments de E puis compléter par $p-k$ éléments de F, et ceci, pour n'importe quelle valeur de k comprise entre 1 et p.

On peut également donner une preuve non combinatoire de ce résultat.
Posons pour cela $P=(X+1)^n$ et $Q=(X+1)^m$.

- Le terme de degré p du polynôme $PQ=(X+1)^{n+m}$ a pour expression $\binom{n+m}{p}X^p$.
- En utilisant la formule du produit de deux polynômes, on trouve également :

$$\sum_{i+j=p}\binom{n}{i}\binom{m}{j}X^{i+j}=\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}X^p$$

D'où l'égalité par identification.

III | Exercices corrigés

Exercice 1 — Combien existe-t-il de couples (x,y) :

1. dans l'ensemble $[\![1,n]\!]^2$ avec $x \neq y$?
2. dans l'ensemble $[\![1,n]\!]^2$ avec $x < y$?
3. dans l'ensemble $[\![1,n]\!]\times[\![1,2n]\!]$ avec $x < y$?

Exercice 2 — À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

Exercice 3 — Combien existe-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot « OUPS » ?
Par exemple : « BOUPSA », « QIOUPS »...

Exercice 4 — De combien de façons peut-on asseoir n personnes :

1. sur un banc ?
2. autour d'une table ?

Exercice 5 — Pour $n \geqslant 3$, combien existe-t-il de permutations de $[\![1, n]\!]$ qui envoient 1 sur 2 et 2 sur 3 ?

Exercice 6 — Un jeu de tarot contient 78 cartes : 21 atouts, la carte qu'on appelle l'*excuse* et 14 cartes pour chacune des 4 couleurs $\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\spadesuit$, $\clubsuit$. Combien de tirages simultanés de 6 cartes d'un tel jeu peut-on obtenir contenant :

1. 2 atouts et 4 $\clubsuit$?
2. 6 $\diamondsuit$; ou bien 3 $\diamondsuit$, 2 $\spadesuit$ et l'excuse ?
3. exactement un atout et au moins 3 as ?

Exercice 7 — On appelle *anagramme* d'un mot tout autre mot qui est composé des mêmes lettres avec multiplicité mais dans un ordre quelconque. Les mots « NOSMAI » et « SIONAM » sont par exemple deux anagrammes du mot « MAISON ». Combien le mot « BOROROS » possède-t-il d'anagrammes ?
Pour information, les Bororos sont un peuple amérindien du Brésil.

Exercice 8 — Dans une association de 18 personnes, on organise l'élection d'un comité de 4 membres, mais les satuts de l'association interdisent qu'on élise deux conjoints — or justement il y a un couple et un seul dans l'association, M. et Mme X.

1. Combien de comités différents peut-on former dans ces conditions ?
2. De combien de comités M. X peut-il être membre ?

Exercice 9 — À l'issue d'un concours, 160 candidats sont admis dont 70 garçons. Déterminer le nombre de classements possibles des 10 premiers admis qui contiennent autant de filles que de garçons.

Exercice 10 — Une joyeuse troupe de n filles et n garçons fait une promenade champêtre.

1. Pour le déjeuner, ils décident de pique-niquer sur un tronc d'arbre. De combien de manières peut-on les asseoir avec une alternance parfaite fille-garçon ?
2. Pour le goûter, ils trouvent une table ronde dans une clairière. De combien de manières peut-on les asseoir avec une alternance parfaite fille-garçon ?

Réponse (Ex. 1) —

1. Pour construire un couple $(x, y) \in [\![1, n]\!]^2$ quelconque pour lequel $x \neq y$, on peut d'abord choisir x (n possibilités), puis choisir y ($n-1$ possiblités pour chaque choix possible de x) ; d'où un total de $n(n-1)$ couples.
2. Pour construire un couple $(x, y) \in [\![1, n]\!]^2$ quelconque pour lequel $x < y$, on peut d'abord choisir y (n possibilités), puis choisir x ($y-1$ possiblités dans $[\![1, y-1]\!]$ pour chaque choix possible de y) — d'où un total de :
$$\sum_{y=1}^{n}(y-1) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} \text{ couples}$$
3. Pour construire un couple $(x, y) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, 2n]\!]$ quelconque pour lequel $x < y$, on peut d'abord choisir x (n possibilités), puis choisir y ($2n - x$ possiblités dans $[\![x+1, 2n]\!]$ pour chaque choix possible de x) — d'où un total de $\displaystyle\sum_{x=1}^{n}(2n-x) = 2n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$ couples.

Réponse (Ex. 2) — Pour la première lettre, on peut choisir n'importe quelle lettre de l'alphabet (p possibilités), mais pour chacune des suivantes, on n'a plus que $p-1$ possibilités de choix car on n'a pas le droit de répéter la lettre précédente — d'où un total de $p(p-1)^{n-1}$ mots.

Réponse (Ex. 3) — Quand le mot « OUPS » apparaît dans un mot de 7 lettres, il n'y apparaît qu'une fois. Pour construire un mot quelonque de 7 lettres contenant le sous-mot « OUPS », on peut donc :

- d'abord choisir la position du mot « OUPS » (4 possibilités car le « O » initial ne peut occuper que les positions 1, 2, 3 et 4),
- puis choisir arbitrairement les autres lettres, i.e. choisir une 3-liste de l'alphabet (26^3 possibilités),

D'où un total de $4 \times 26^3 = 70\,304$ mots.

Réponse (Ex. 4) —

1. On peut considérer que les personnes à asseoir sont numérotées de 1 à n. Les positions sur le banc sont quant à elles également numérotées naturellement de 1 à n, de la gauche vers la droite par exemple. Asseoir n personnes sur un banc revient alors à se donner un n-arrangement quelconque de $[\![1, n]\!]$ — d'où un total de $n!$ configurations possibles.
2. La différence avec la question 1. consiste en ceci qu'il n'y a pas de première place autour d'une table ronde — par exemple, on ne change pas la configuration des places assises quand on demande à chaque convive de se déplacer d'une place sur sa droite. Pour asseoir n personnes autour d'une table ronde :
   - on peut ainsi commencer par asseoir arbitrairement la personne numérotée n ;
   - puis lui donner des voisins de proche en proche par la droite en se donnant un $(n-1)$-arrangement quelconque de $[\![1, n-1]\!]$, soit $(n-1)!$ possibilités.

   D'où un total de $(n-1)!$ configurations possibles.

Réponse (Ex. 5) — Pour construire une telle permutation, on peut d'abord choisir l'image de 3 ($n-2$ possibilités), puis celle de 4 ($n-3$ possibilités)... et enfin celle de n (1 possibilité) — d'où un total de $(n-2)\times(n-3)\times\ldots\times 1 = (n-2)!$ permutations.

Réponse (Ex. 6) —

1. Il s'agit de choisir 2 atouts soit $\binom{21}{2}$ possibilités, puis 4 trèfles soit $\binom{14}{4}$ possibilités.

   D'où un total de $\binom{21}{2} \times \binom{14}{4}$ tirages possibles.
2. Au total $\binom{14}{6} + \binom{14}{3} \times \binom{14}{2} \times \binom{1}{1}$ tirages possibles — les deux alternatives étant disjointes.
3. On peut construire $\binom{21}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{78-21-4}{2}$ tirages contenant exactement un atout et exactement 3 as, et par ailleurs $\binom{21}{1} \times \binom{4}{4} \times \binom{78-21-4}{1}$ tirages contenant exactement un atout et les 4 as.
   D'où un total de :
$$\binom{21}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{78-21-4}{2} + \binom{21}{1} \times \binom{4}{4} \times \binom{78-21-4}{1}$$
   tirages possibles — les deux alternatives étant disjointes.

Réponse (Ex. 7) — On s'intéresse à l'ensemble des mots de 7 lettres que l'on peut former avec 3 O, 2 R, 1 B et 1 S. Pour construire un tel mot quelconque, on peut choisir :

- d'abord la position des O, soit $\binom{7}{3} = 35$ possibilités ;
- puis la position des R, soit $\binom{7-3}{2} = 6$ possibilités ;
- puis la position du B, soit $\binom{2}{1} = 2$ possibilités ;
- et enfin la position du S, soit $\binom{1}{1} = 1$ possibilité.

D'où un total de $35 \times 6 \times 2 = 420$ anagrammes possibles.

REMARQUE : *On aurait pu choisir la position des lettres dans un ordre différent — par exemple d'abord le « S », puis les « R », puis le « B », puis les « O ». On obtient bien sûr le même résultat, mais présenté différemment :*

$$\binom{7}{1} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{3} = 7 \times 15 \times 4 = 420 \textit{ anagrammes possibles.}$$

Réponse (Ex. 8) —

1. On peut former en tout $\binom{18}{4}$ comités possibles si on ne tient pas compte des statuts spécifiques de l'association, mais combien de comités se trouvent en réalité interdits par ces statuts ? Former un comité interdit, c'est choisir 4 personnes dans l'association dont M. et Mme X, c'est donc choisir simplement 2 personnes parmi les 16 membres de l'association qui ne sont ni M. X ni Mme X, soit $\binom{16}{2}$ possibilités.
   Au total $\binom{18}{4}-\binom{16}{2}=2\,940$ comités peuvent être formés.
2. Former un comité qui contient M. X, c'est choisir 3 personnes autres que M. X et Mme X dans l'association — d'où un total de $\binom{16}{3}=560$ comités possibles.

Réponse (Ex. 9) —
Pour construire un classement quelconque des 10 premiers admis avec autant de filles que de garçons, on peut choisir indépendamment :

- les 5 positions qu'occuperont les filles parmi les 10 possibles, soit $\binom{10}{5}$ possibilités ;
- un 5-arrangement des 90 filles admises, soit $\frac{90!}{85!}$ possibilités ;
- un 5-arrangement des 70 garçons admis, soit $\frac{70!}{65!}$ possibilités.

D'où un total de $\binom{10}{5}\times\frac{90!}{85!}\times\frac{70!}{65!}$ classements.

Réponse (Ex. 10) —

1. On peut considérer par exemple qu'on asseoit les $2n$ individus les uns après les autres de la gauche vers la droite. Pour construire une configuration quelconque conforme à l'énoncé, on peut choisir :
   - d'abord si on asseoit en premier une fille ou un garçon (2 possibilités),
   - ensuite un n-arrangement de l'ensemble des n garçons ($n!$ possibilités),
   - enfin un n-arrangement de l'ensemble des n filles ($n!$ possibilités),

   D'où un total de $2\times n!^2$ répartitions possibles.
2. On peut considérer que l'un des garçons, fixé, est pris comme point de départ du plan de table et que les individus sont ensuite placés les uns après les autres dans l'ordre des aiguilles d'une montre — on le peut parce que la table est ronde. Pour construire une configuration quelconque conforme à l'énoncé, on peut choisir :
   - d'abord un $(n-1)$-arrangement de l'ensemble des $n-1$ garçons autres que le garçon « point de départ » ($(n-1)!$ possibilités),
   - ensuite un n-arrangement de l'ensemble des n filles ($n!$ possibilités),

   D'où un total de $(n-1)!\times n!$ répartitions possibles.