Déterminant

Travaux dirigés #02

Exercice 1 — Calculer les déterminants suivants.

$$A = \begin{vmatrix} 1+i & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2+3i & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -3 & 9 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 2 — Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants.

$$A = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}$$

Exercice 3 — Déterminant de Vandermonde et applications

1. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. On appelle déterminant de Vandermonde le réel défini par :
$$V(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$
Prouver que $V(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_i - x_j)$.
2. On considère n réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ disctincts.
Montrer que la famille $(x \mapsto e^{\alpha_i x})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.
3. Démontrer qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ prenant des valeurs données en n points donnés distincts.

Exercice 4 — Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$\left|\begin{array}{l} \forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} = 2 \\ \forall i \in [\![1,n-1]\!],\ a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1 \\ a_{i,j} = 0 \text{ partout ailleurs} \end{array}\right.$$

On note Δ_n le déterminant de la matrice A.

1. Calculer Δ_2 et Δ_3.
2. Montrer que :
$$\forall n \geqslant 3, \quad \Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$
3. En déduire Δ_n en fonction de n.

Exercice 5 — Calculer les déterminants suivants :

$$A(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x_1) & \cos(2x_1) \\ 1 & \cos(x_2) & \cos(2x_2) \\ 1 & \cos(x_3) & \cos(2x_3) \end{vmatrix} \quad C_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ c & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ c & \dots & \dots & c & a \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} \quad E_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \vdots & n & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & \vdots & \ddots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 6 — Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique. Calculer $\det(A)$.

Exercice 7 — Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $D \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $CD = DC$.
Montrer que :
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

Exercice 8 — Calculer les déterminants d'ordre n suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & \lambda_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \lambda_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

Exercice 9 — Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ et $J, M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définies par :

$$M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} ; \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

On note $\overline{J}$ la matrice dont tous les coefficients sont les conjugués de ceux de J.

1. Calculer les produits $J\overline{J}$ et $JM\overline{J}$.
2. En déduire le déterminant de M sous forme factorisée.
3. Dans cette question, x, y et z sont supposés réels. Décrire l'ensemble :

$$\mathscr{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ M(x,y,z) \text{ non inversible}\right\}$$

Exercice 10 — Calculer les déterminants d'ordre n suivants :

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad B_n = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & \dots & \dots & a_1 \\ \vdots & a_2 & \dots & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \end{vmatrix}$$

$$C_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & (0) \\ x & 1+x^2 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x & 1+x^2 & x \\ (0) & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \qquad D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & & a^{n-1} \\ a & 1 & \ddots & \ddots & \\ a^2 & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ & \ddots & \ddots & 1 & a \\ a^{n-1} & & a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 11 — Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer que la famille de polynômes $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P_i(X) = (X + a_i)^n$, est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 12 — Calculer les déterminants d'ordre n :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n-1 & n \\ n & \dots & \dots & n & n \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ a & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 13 — Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}$$

Exercice 14 — On considère un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct. Montrer que trois points $M(x, y)$, $M'(x', y')$ et $M''(x'', y'')$ sont alignés si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 15 — Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on note D le déterminant de la famille (P, XP, P', XP', X^2P') dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

1. Montrer que $D = 0$ si et seulement s'il existe deux polynômes non nuls $U \in \mathbb{R}_1[X]$ et $V \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $PU = P'V$.
2. Montrer que $D = 0$ si et seulement si P admet une racine multiple.
3. Calculer D pour $P = X^3 + pX + q$ avec $p, q \in \mathbb{R}$.
4. Trouver a pour que $P = X^3 - 3aX - 3a + 1$ ait une racine multiple.