Équations différentielles

Travaux dirigés #13

Partie A – Équations linéaires d'ordre 1

Exercice 1 — Intégrer les équations différentielles suivantes :

$$y' + y = \sin(t)\ ;\quad \cos(t)y' + \sin(t)y = t\ ;\quad y' - \cos(t)y = \sin(2t)$$

$$2ty' + y = 1 + t\ ;\quad y' - 2y = \sin(2t)\mathrm{e}^t\ ;\quad (1-t)y' + y = t$$

Exercice 2 — Intégrer l'équation différentielle suivante :

$$(1+t)^3 y' + 2(1+t)^2 y = 1$$

et déterminer une solution qui s'annule pour $t = 0$.
Construire la courbe intégrale correspondante.

Exercice 3 — Déterminer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f vérifiant $f(0) = 0$ et solution de l'équation différentielle :

$$2(x-1)y' + y = \sin(2x) + x^2$$

Exercice 4 — On considère l'équation :

$$|x|y' - y = x^2$$

1. Résoudre cette équation sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 — Déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice 6 — Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ le problème différentiel :

$$\begin{cases} \cos(x)y' + \sin(x)y = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Partie B – Équations linéaires d'ordre 2

Exercice 7 — Intégrer les équations différentielles suivantes :

$$y'' + y' + y = t^2\mathrm{e}^t + t\ ;\quad y'' + 4y' + 4y = \sin t$$

$$y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sh}(2t)\ ;\quad y'' + 4y' + 4y = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{1+t^2}$$

Exercice 8 — Résoudre pour $m \in \mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$$y'' + 2my' + y = \mathrm{e}^{-t}\ ;\quad y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{mt}\ ;\quad y'' - 2my' + (m^2+1)y = \mathrm{e}^x \sin x$$

Exercice 9 — Soit l'équation :

$$(1+x^2)y'' + xy' - y = 0 \quad (E)$$

1. Déterminer une solution sur $\mathbb{R}$ polynomiale.
2. Déterminer une solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. Construire la courbe intégrale passant par le point $A(0,1)$ avec une tangente parallèle à la première bissectrice.

Exercice 10 — Résoudre le problème de Cauchy suivant à l'aide de séries entières :

$$\begin{cases} y'' - 2xy' - y = 0 \\ y(0) = 1\ ;\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 11 — Intégrer $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$ en posant $x = \operatorname{sh}(t)$.

Exercice 12 — Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle $4xy'' + 2y' - y = 0$.

Exercice 13 — On considère l'équation différentielle :

$$(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0 \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les solutions de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}$ de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre (E) sur un intervalle ne contenant pas $-\dfrac{1}{2}$.

Exercice 14 — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère sur $]-1,1[$ l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y''-\alpha xy'+\alpha y=0 \quad (E_\alpha)$$

1. On suppose que $\alpha=2$. Déterminer les solutions de (E_2) développables en séries entières. Après avoir calculé leur rayon de convergence, exprimer ces solutions à l'aide de fonctions élémentaires.
   A-t-on toutes les solutions de (E_2) ?
2. On suppose maintenant que $\alpha=3$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\varphi(P)=(1-X^2)P''-3XP'$$

   a) Montrer que l'on définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b) Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
   c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
   En déduire toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_3).
3. On suppose désormais que $\alpha=1$. Résoudre l'équation (E_1) à l'aide du changement de variable $x=\sin t$.

Exercice 15 — Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $t^3y''+ty'-y=0$ à l'aide d'une solution polynomiale non nulle.

Exercice 16 — Soit l'équation différentielle :

$$x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1 \quad (E)$$

Intégrer (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ en posant $z=x^2y$. Étudier le recollement en 0.

Partie C – Systèmes différentiels linéaires

Exercice 17 — Résoudre les sytèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x'=3x-y+2 \\ y'=x+y+2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=5x-2y+e^t \\ y'=-x+6y+t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=2x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z+1 \\ y'=x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z+1 \\ z'=-x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=x+z \\ y'=-y-z \\ z'=2y+z \end{cases}$$

Exercice 18 — Résoudre le problème différentiel :

$$\begin{cases} x'=5x+y-z \\ y'=2x+4y-2z \\ z'=x-y+3z \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 19 — Montrer sans résoudre que les trajectoires du système différentiel suivant sont planes :

$$\begin{cases} x'=4x-3y+2z \\ y'=6x-5y+4z \\ z'=4x-4y+4z \end{cases}$$

Exercice 20 — Résoudre les problèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x''=x+8y-2 \\ y''=2x+y+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=x-y-z+t \\ y'=-x+y-z+t \\ z'=-x-y+z+t \end{cases}$$

Partie D – Équations non linéaires

Exercice 21 — Intégrer l'équation différentielle suivante :

$$x - y - (x+y)y' = 0$$

On cherchera une équation implicite des solutions.

Exercice 22 — Intégrer l'équation différentielle $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$ en posant $y = tx$.

Exercice 23 — On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$y'(y^2 - x^2) + 2xy = 0$$

sur un intervalle I ne contenant pas 0.

1. On pose $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$.
   Déterminer une équation à variables séparables vérifiée par z.
2. Pour une solution z ne s'annulant pas sur I, exprimer z en fonction de x.
3. En déduire un paramétrage des courbes intégrales du problème initial et en déduire leur nature géométrique.

Exercice 24 — Équation de Bernoulli
Résoudre l'équation $xy' + y = y^3$ à l'aide du changement de variable $z = y^{-2}$.

Exercice 25 — On cherche à résoudre sur l'ouvert $U = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ l'équation :

$$x^2 y' - xy + y^2 \quad (E)$$

1. En posant $z = \dfrac{1}{y}$, déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer les solutions de (E) telles que $y(1) = 1$.