Fonctions de plusieurs variables

Travaux dirigés #14

Partie A – Généralités

Exercice 1 — Représenter chacun des ensembles suivants et dire s'il s'agit de parties bornées, ouvertes et/ou fermées.

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}; \quad B = (\mathbb{R}^*)^2; \quad C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 < 1\right\};$$
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant 1 \text{ et } |y| \leqslant 1\right\}; \quad E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 2\right\};$$
$$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < |x-1| \leqslant 2\right\}; \quad G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1, 1 < x < 2\right\}$$
$$H = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in [0,2\pi], \rho \in [0,3]\};$$
$$I = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4\right\};$$
$$J = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, r \in [0,1], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } z \geqslant 0\right\}$$

Exercice 2 — Déterminer l'ensemble de définition des fonctions :

$$f : (x,y) \mapsto \ln(x) + \ln(y); \quad g : (x,y) \mapsto \ln(xy)$$

Exercice 3 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \cos(x-y)$.
Donner l'équation du plan tangent à la surfce représentative de f au point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 0, f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\right)$.

Exercice 4 — Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en $(0,0)$?

$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2+y^2}; \; g : (x,y) \mapsto \frac{x}{x^2+y^2}; \; h : (x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Exercice 5 — Soit f la fonction définie par $f(x,y,z) = \sin^2 x + \cos^2 y + z^2$.

1. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de f en un point $A(x_0, y_0, z_0)$.

Exercice 6 — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \arctan(2x+y)$$

Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 2.

Exercice 7 — Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x,y) = f(x+\varphi(y))$.
Vérifier que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et établir l'égalité suivante :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Exercice 8 — Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f et celle de ses dérivées partielles.
2. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Conclure.

Partie B – Équations aux dérivées partielles

Exercice 9 — Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

Exercice 10 — À l'aide d'un changement de variable linéaire, déterminer toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Exercice 11 — Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ telles qu'en tout point de $\mathscr{U}$, on ait :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

Exercice 12 — À l'aide du changement de variables défini par $u = xy$ et $v = \dfrac{x}{y}$, déterminer toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U} = (\mathbb{R}_+^*)^2$, solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Partie C – Extremums locaux

Exercice 13 — Déterminer les extremums locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$
2. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3$
4. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$

Exercice 14 — On pose $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\right\}$.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.
2. Soient $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^a y^b (1-x-y)^c$$

Montrer que f est continue sur $\mathscr{D}$.

3. Déterminer $\sup\limits_{(x,y)\in\mathscr{D}} f(x,y)$.

Exercice 15 — Déterminer :

$$\sup_{(x,y)\in]0,+\infty[^2} \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} \; ; \qquad \sup_{(x,y)\in[0,\pi/2]^2} \sin(x)\cdot\sin(y)\cdot\sin(x+y)$$