Intégrales à paramètres

Travaux dirigés #12

Exercice 1 — Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \text{ et } h(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

1. Montrer que g et h sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer leurs dérivées.
2. Vérifier que $g + h^2$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$, constante que l'on déterminera.
3. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on a : $0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x^2}$.
   En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 2 — Pour $x > -1$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x\sin^2 t)\,dt$$

1. Montrer que f est continue sur $]-1, +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ et exprimer $f'(x)$ sous forme d'intégrale.
3. Calculer explicitement $f'(x)$ en utilisant le changement de variable $u = \tan t$. On distinguera les cas $x = 0$ et $x \neq 0$.
4. En déduire une expression explicite de $f(x)$ pour $x > -1$.

Exercice 3 — Étude de la fonction Γ

Soit la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$.

1. Montrer que Γ est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k(t)e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

4. En déduire que la fonction Γ est convexe sur $]0, +\infty[$.
5. Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
7. Démontrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Exercice 4 — Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ sous forme d'intégrale.
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{x}{2}y = 0$.
4. En déduire une expression de f en utilisant l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 5 — Transformée de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\hat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\,dt.$$

$\hat{f}$ est appelée transformée de Fourier de f.

1. Démontrer que $\hat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. On considère désormais la fonction f définie par $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.
   Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $\hat{f}'$ et en déduire la valeur de f.
   On admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 6 — Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.
On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 7 — Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t}\,dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la continuité puis la dérivabilité de f.
3. Déduire de f' la valeur de f.

Exercice 8 — Étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_0^1 \sqrt{x + t^3}\,dt$$