Intégrales généralisées

Travaux dirigés #06

Partie A – Intégrales sur un segment

Exercice 1 — Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable proposé, le cas échéant.

$$A=\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x\,;\quad B=\int_0^1\frac{x+2}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x\,;\quad C=\int_0^1\frac{3x+2}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x\,;$$

$$D=\int_{-2}^{1}\frac{-x^3-2x^2+4x+9}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x\,;\quad E=\int_2^3\frac{x^7}{(x^4-1)^2}\,\mathrm{d}x\quad(u=x^4)\,;\quad F=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)}\,;$$

$$G=\int_1^2\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x\,;\quad H=\int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t\,;\quad I=\int_0^1(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{4x}\sin(5x)\,\mathrm{d}x\,;\quad K=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\,;\quad L=\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 t\cos t}{1+\cos^2 2t}\,\mathrm{d}t\quad(u=\cos 2t)\,;$$

$$M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x\,;\quad N=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\quad(u=\pi-t)\,;$$

$$O=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}\quad\left(u=\tan\frac{x}{2}\right)\,;\quad P=\int_0^1\frac{\sqrt{2+x}}{1+x}\,\mathrm{d}x\quad(x=u^2-2).$$

Exercice 2 — Déterminer une primitive des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalle(s) de validité :

$$f_1:x\mapsto\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,;\quad f_2:x\mapsto\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,;\quad f_3:x\mapsto\frac{x^2}{\sqrt{5+x^3}}\,;\quad f_4:x\mapsto\frac{x^2}{\sqrt[4]{(x^3+1)^7}}\,;$$

$$f_5:x\mapsto\frac{x}{\cos^2(x)}\,;\quad f_6:x\mapsto\arctan(x)\,;\quad f_7:x\mapsto\arcsin(x)\,;\quad f_8:x\mapsto\ln(1+x^2)\,;$$

$$g_1:x\mapsto\sin^2 x\,;\quad g_2:x\mapsto\cos^2 x\,;\quad g_3:x\mapsto\sin^2 x\cos^3 x\,;\quad g_4 x\mapsto\sin^4 x\cos^2 x\,;$$

$$g_5:x\mapsto\sin(\ln(x))\,;\quad g_6:x\mapsto\cos(\ln(x))\,;\quad g_7:x\mapsto\sin(2x)\ln(\tan x).$$

Exercice 3 —

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1\left\lfloor 4x+\frac{1}{2}\right\rfloor\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1\sup\left(x,(x-1)^2\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 4 —

1. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.
   Calculer $I_{n+1}-I_n$ et en déduire la valeur de I_n pour tout n.
2. Reprendre la question précédente avec $J_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nx)}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ $(n\in\mathbb{N})$.

Exercice 5 — Série harmonique

1. On pose pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
   À l'aide d'un encadrement somme/intégrale, montrer que :
   $$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n.$$
2. On pose alors $v_n=u_n-\ln n$ pour $n\geqslant 1$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 6 — Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n$ quand :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}\,;\qquad S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2\sqrt{n^3+k^3}}\,;\qquad S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\,;$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\,;\qquad S_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}\,;\qquad S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 7 — On pose :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^2 x}{\cos 2x}\,\mathrm{d}x\quad\text{et}\quad J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 x}{\cos 2x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer $I-J$ puis $I+J$ (on pourra poser $u=\tan x$).
2. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 8 — Lemme de Riemann-Lebesgue
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 9 — Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. a) Montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{n+1}$$
   b) En déduire que la suite (I_n) converge et donner sa limite.
2. Établir que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n=\frac{1}{(n+1)\mathrm{e}}+\frac{I_{n+1}}{n+1}$$
3. a) En déduire que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant I_n-\frac{1}{(n+1)\mathrm{e}}\leqslant\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
   b) Trouver un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10 — On considère la suite d'intégrales $J_n=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$ où $n\in\mathbb{N}$.

1. Calculer $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$.
   Exprimer J_0 en fonction de I et en déduire la valeur de J_0.
2. Montrer que, pour $n\geqslant 1$, $0\leqslant J_n\leqslant\dfrac{1}{n}$.
   En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   En déduire sans calcul supplémentaire que :
$$\frac{1}{2}(J_n+J_{n+1})\leqslant J_n\leqslant\frac{1}{2}(J_{n-1}+J_n).$$
4. Calculer la valeur de J_n+J_{n+1} en fonction de n.
5. En déduire la limite de la suite $(nJ_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 11 — Montrer que :
$$\frac{\pi^2}{16}\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 12 — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :
$$u_n=\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k+1}\ \text{ et }\ v_n=u_n-\ln 2.$$

1. Calculer pour $x\in[0,1]$, la quantité $f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^n(-1)^kx^k$.
2. En intégrant f_n, montrer que :
$$v_n=(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\ln 2$.
4. Calculer $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^n v_k$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n$.

Partie B – Intégrales impropres

Exercice 13 — Établir la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes.
$$A=\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\ ;\quad B=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}\ ;\quad C=\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\ ;$$
$$D=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\ ;\quad E=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\ ;\quad F=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\ ;$$
$$G=\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t\ ;\quad H=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{1+x^8}\,\mathrm{d}x\ ;\quad I=\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 14 — Étudier la nature de l'intégrale des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x - \sqrt{x}}\ ; \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+a}\,\mathrm{d}t \quad (a \geqslant 0)\ ; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ ;$$

$$I_4 = \int_1^{+\infty} (\sqrt{t^2+1} - t)\,\mathrm{d}t\ ; \quad I_5 = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t\ ; \quad I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{th}(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Exercice 15 — Étudier la nature des intégrales impropres suivantes.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+x+1}}\,\mathrm{d}x\ ; \quad \int_1^{+\infty} \left(x+1-\sqrt{x^2+2x}\right)\mathrm{d}x\ ; \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \cos(x)}.$$

Exercice 16 — Établir la nature des intégrales suivantes.

$$J_1 = \int_0^{+\infty} (x+2-\sqrt{x^2+4x+1})\,\mathrm{d}x\ ; \quad J_2 = \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t\ ;$$

$$J_3 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^n}}\ ; \quad J_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{|x^\alpha - 1|^\beta}\ ; \quad J_5 = \int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x.$$

Exercice 17 —

1. Établir pour $n \in \mathbb{N}^*$ la convergence de l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$

2. Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1} pour $n \geqslant 1$.
3. En déduire la valeur de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 18 —

1. Soit $\alpha \in]0,1]$. Montrer la convergence de l'intégrale $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$.
2. Quelle est la nature de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$?
3. Donner un équivalent de $\ln\left(1+\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

   Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$?

Exercice 19 — Intégrales de Bertrand
Soit $a > 1$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour que l'intégrale suivante converge :

$$I_{\alpha,\beta} = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln^\beta t}$$

Exercice 20 — Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que :

$$\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\frac{b}{a} + \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-bu} - \mathrm{e}^{-au}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

2. En déduire la convergence et la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bu} - \mathrm{e}^{-au}}{u}\,\mathrm{d}u$$

Exercice 21 —

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 22 —

1. Montrer la convergence et calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$.
2. Calculer $J = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-2\cos x}{5-4\cos x}\,\mathrm{d}x$.

3. Montrer la convergence et calculer :

$$K = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}.$$

Exercice 23 — On pose :

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \text{ et } J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier l'existence de I ainsi que de J.
2. Prouver que $I = J$.
3. Calculer $I + J$. En déduire la valeur de I.

Exercice 24 — Soit $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t} - \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

1. Déterminer un équivalent de φ en $+\infty$.
2. En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Calculer la valeur de cette intégrale.

Exercice 25 —

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
2. Montrer que cette intégrale est semi-convergente.

Exercice 26 — On pose pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $f(x) + \ln x$ a une limite finie lorsque $x \to 0^+$.
3. En intégrant deux fois par parties, montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^{5/2}}\right).$$

4. On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$. Prouver que l'intégrale converge et calculer I.

Exercice 27 — Étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x) = x\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{|t|}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 28 — Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{ix^2}}{2ix} + \frac{1}{2i}\int_x^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{it^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$