Isométries d'un espace euclidien

Travaux dirigés #10

Partie A – Isométries

Exercice 1 — Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère le sous-espace F défini par les équations : $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y+2z=0. \end{cases}$

1. Déterminer $F^\perp$.
2. On note s la symétrie orthogonale par rapport à F. Déterminer sa matrice dans la base canonique.

Exercice 2 —

1. On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique. Soit p la projection orthogonale sur :
$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y-z+t=0\}$$
Déterminer la matrice de p dans la base canonique puis la distance de $(1,0,1,1)$ à F.
2. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à :
$$F = \{(x,y,z), x+2y-z=0, 2x-y=0\}$$
Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 3 — On considère un espace euclidien orienté E de dim. 2.

1. Que peut-on dire de la composée de deux rotations ?
2. Que peut-on dire de la composée de deux réflexions ?
3. Que peut-on dire de la composée d'une rotation et d'une réflexion ?
4. Montrer que toute rotation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions.
5. Montrer que ce dernier résultat se généralise en dimension 3.

Exercice 4 — Déterminer la nature géométrique des endomorphismes dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -11 & 9 & 3\sqrt{6} \\ 9 & 13 & -\sqrt{6} \\ 3\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 14 \end{pmatrix} \quad C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & -4 \\ -8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 —
On note $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe orienté par $\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$.
2. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe orienté par $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 6 — Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $A \in \mathscr{O}(3)$?
2. Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique serait A.

Exercice 7 — Soit E un espace euclidien, a un vecteur unitaire de E. Pour α réel, on définit φ_α sur E par :
$$\varphi_\alpha(x) = x + \alpha \langle x | a \rangle a$$

1. Vérifier que φ_α est un endomorphisme symétrique de E.
Déterminer les éléments propres de φ_α.
2. Peut-on avoir φ_α orthogonal ?
Caractériser alors géométriquement φ_α.

Exercice 8 — Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

1. Soit r la rotation d'axe D (dirigé et orienté par un vecteur unitaire ω) et d'angle θ. Montrer que pour tout vecteur x de E,

$$r(x) = \cos\theta x + \sin\theta \omega \wedge x + (1-\cos\theta)(x|\omega)\omega$$

2. Soit $\mathscr{B} = (i, j, k)$ une base orthonormale directe de E. Écrire la matrice A relativement à la base $\mathscr{B}$ de la rotation d'axe D dirigé et orienté par le vecteur $i + j + k$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 9 — Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.
Soit u un endomorphisme de E supposé non nul.
Montrer que u est une rotation si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E,\ u(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$$

Exercice 10 — Soient E un espace vectoriel euclidien, $u \in E$ non nul et $g \in \mathscr{O}(E)$. On note σ la réflexion par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$. Décrire $g \circ \sigma \circ g^{-1}$.

Exercice 11 — Soit E un espace euclidien de dimension $N \geqslant 2$ et f un endomorphisme orthogonal de E.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{id}_E + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

1. Vérifier que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.
2. Pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, calculer $p_n(x)$.
3. Pour tout $x \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$, calculer $p_n(x)$.
4. En déduire la nature de l'endomorphisme $g = \lim_{n\to+\infty} p_n$.

Partie B – Endomorphismes symétriques et antisymétriques

Exercice 12 — Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 — Soit E un espace euclidien et s un endomorphisme vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (s(x)|y) = (x|s(y))$$

Montrer que $(\mathrm{Ker}\, s)^\perp = \mathrm{Im}\, s$.

Exercice 14 — Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant : $\forall x \in E,\ (f(x)|x) = 0$.

1. Montrer que f est antisymétrique :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ (f(x)|y) = -(x|f(y))$$

2. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^\perp$.
3. Montrer que toute valeur propre de f est nulle.
   À quelle condition f est-il diagonalisable ?
4. Montrer que la réunion d'une base othonormale de $\mathrm{Im}\, f$ et de $\mathrm{Ker}\, f$ constitue une base orthonormale de E et déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 15 — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^T A) = \mathrm{Ker}(A)$.
2. En déduire que $\mathrm{rg}(A^T A) = \mathrm{rg}(A)$.

Exercice 16 — Quelles sont les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^t AA = I_n$?
INDICATION : *On montrera que A est symétrique.*

Exercice 17 — Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E.

- u est dit symétrique si : $\forall x, y \in E \ \ (u(x)|y) = (x|u(y))$;
- u est dit positif si : $\forall x \in E \ \ (u(x)|x) \geqslant 0$;
- u est dit défini positif si : $\forall x \in E \setminus \{0_E\} \ \ (u(x)|x) > 0$.

Dans toute la suite, u désigne un endomorphisme symétrique.

1. Traduire matriciellement ces propriétés.
   Les matrices correspondantes seront dites positives et définies positives.

2. Démontrer les équivalences :

$$\begin{aligned} A \text{ positive} &\iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+ \\ &\iff \exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad A = M^T M \end{aligned}$$

3. Démontrer les équivalences :

$$\begin{aligned} A \text{ définie positive} &\iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^* \\ &\iff \exists M \in GL_n(\mathbb{R}) \quad A = M^T M \end{aligned}$$

Exercice 18 — Soit E un espace euclidien orienté de dimension trois.
Soit u un vecteur non nul. Montrer que l'endomorphisme $f : x \mapsto u \wedge (u \wedge x)$ est symétrique. Déterminer ses éléments propres.

Partie C – Coniques

Exercice 19 — Déterminer la nature et les éventuelles symétries des coniques suivantes :

1. $4x^2 + y^2 + 4x - 2y - 6 = 0$
2. $x^2 - y^2 + 4x + 2y + 3 = 0$
3. $10x^2 + 10x - 3y^2 + 12y - 2 = 0$
4. $27x^2 - 16y^2 + 18x - 64y - 12 = 0$
5. $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$
6. $3x^2 + \sqrt{3}xy - 2y^2 + 14y - 4 = 0$
7. $x^2 + 2xy + y^2 - 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y + 6 = 0$

Exercice 20 — Déterminer la nature de la courbe d'équation $3x^2 + 4xy - 12x + 16 = 0$
Déterminer une équation de la tangente au point $A(4, -1)$.

Exercice 21 — On considère un polynôme P de degré 3 défini par $P = X^3 + \lambda X^2 + \mu X + \delta$ et la courbe $\mathscr{C}$ formée des points $M(x, y)$ d'équation vérifiant $P(y) = P(x)$. Montrer que $\mathscr{C}$ est soit une droite, soit la réunion d'une droite et d'une conique.

Exercice 22 — Soit A le point de coordonnées $(1, 0)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé. On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y^2 + x = 1$ et l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$. Pour tout $m \neq 0$, la droite variable Δ_m d'équation $y = m(1 - x)$ passant par A recoupe la parabole en un point $M \neq A$ et l'ellipse en un point $N \neq A$.

1. Donner les coordonnées de M et N.
2. Donner une équation de la tangente en M à la parabole $\mathscr{P}$ et une équation de la tangente en N à l'ellipse $\mathscr{E}$.
3. Déterminer le lieu des points d'intersection I de ces deux tangentes quand m décrit $\mathbb{R}^*$.

Exercice 23 — Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y^2 = 2px$ et $A \in \mathscr{P}$ pour $p > 0$.
Une droite variable D coupe $\mathscr{P}$ en deux points M et N tels que $AM \perp AN$.

1. Montrer que D passe par un point fixe Q.
2. Déterminer le lieu de Q lorsque A décrit $\mathscr{P}$.

Exercice 24 — On considère les deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équation respective :

$$x^2 + y^2 - 4x = 0\,; \quad x^2 + y^2 - 2y = 0$$

Déterminer la nature du lieu H des centres des cercles tangents extérieurement à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.