Probabilités

Travaux dirigés #07

Partie A – Probabilités sur un univers fini

Exercice 1 — On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité de tirer :

1. l'as de ♠ et l'as de ♣ ?
2. exactement deux as ?
3. au moins deux as ?
4. exactement deux as et deux rois ?
5. une double paire ?
6. trois cartes de même valeur ?
7. trois as et deux rois ?
8. un full ?

Exercice 2 — On dispose de deux pièces : la pièce A donne face avec la probabilité $1/2$, la pièce B donne face avec la probabilité $2/3$.
On choisit une des pièces au hasard. On la lance. Si l'on obtient face, on conserve la pièce que l'on vient de lancer, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers.

1. On note p_n la probabilité de jouer avec la pièce A au n-ième lancer. Calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la probabilité d'obtenir face au n-ième lancer.

Exercice 3 — *Loi Évin*
Un fumeur veut arrêter de fumer. Il est tiraillé entre le manque de volonté et la mauvaise conscience : s'il a réussi à ne pas fumer un jour, il fume le lendemain avec la probabilité $1/2$ mais, s'il a fumé un jour, alors il ne fume le lendemain qu'avec la probabilité $1/4$. On note p_n la probabilité qu'il fume le n-ième jour.

1. Calculer p_{n+1} en fonction de p_n, puis calculer p_n en fonction de p_1 et n.
2. Donner la limite de p_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 4 — Quatres urnes contiennent des boules :

– l'urne 1 contient 3 rouges, 2 blanches et 3 noires ;
– l'urne 2 contient 4 rouges, 3 blanches et 1 noire ;
– l'urne 3 contient 2 rouges, 1 blanche et 1 noire ;
– l'urne 4 contient 1 rouge, 6 blanches et 2 noires.

On choisit au hasard une urne et de celle-ci l'on tire une boule au hasard.

1. Calculer la probabilité que cette boule ne soit pas blanche.
2. Si la boule est rouge, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne 3 ?

Exercice 5 — Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8. On tire trois fois de suite une boule avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres :

1. dans un ordre strictement croissant ?
2. dans un ordre croissant ?

Exercice 6 — Une urne contient 3 boules noires et 7 boules blanches. On tire une boule, Tim et Tom regardent la couleur de la boule. Sans se consulter, Tim et Tom annoncent une couleur. Tim ment une fois sur 20 et Tom une fois sur 10. Tim annonce que la boule est noire et Tom qu'elle est blanche. Qui croire ?

Exercice 7 — *Menteurs, menteurs...*
On considère n menteurs $M_1, M_2, ..., M_n$. Le menteur M_i transmet une information sous forme de « oui » ou « non » à M_{i+1}. M_i transmet la bonne information avec la probabilité p et la mauvaise avec la probabilité $1-p$ $(0<p<1)$.

1. Calculer la probabilité p_n pour que l'information transmise à M_1 soit rendue fidèlement par M_n ?
2. Déterminer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 — On dispose d'une urne A contenant deux boules rouges et une boule noire et d'une urne B contenant une boule rouge et deux boules noires. On tire une boule de l'urne A (premier tirage), on note sa couleur et on la remet dans A. Si cette boule est rouge, on effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise immédiate de la boule tirée dans l'urne A. Si elle est noire, on effectue les mêmes tirages dans l'urne B. On appelle ces deux tirages 2 et 3.

1. Déterminer les probabilités des événements suivants.
   a) Le tirage 2 a amené une boule noire.
   b) Le tirage 3 a amené une boule noire.
   c) Les tirages 2 et 3 ont amenés une boule noire.
2. On suppose que le second tirage a amené une boule noire. Quelle est la probabilité pour que le troisième tirage amène une boule noire ?
3. Quelle est la probabilité pour que le premier tirage ait amené noir si les deux derniers ont amené noir ?

Exercice 9 — Un laboratoire vient de mettre au point un test pour détecter une maladie qui touche en moyenne un individu sur 5 000.

- Pour un patient malade, la probabilité d'être positif au test est de $\dfrac{998}{1000}$.
- Pour un patient sain, la probabilité d'être négatif au test est de $\dfrac{2999}{3000}$.

1. Ce test est-il vraiment fiable pour dépister les individus malades ?
2. Est-il vraiment fiable pour dépister les individus sains ?

Exercice 10 — Un feu bicolore, lorsqu'il est rouge à un instant donné, passe au vert à l'instant suivant avec la probabilité p et lorsqu'il est vert passe au rouge avec la probabilité q. On suppose que $p, q \in]0,1[$. On note r_n (resp. v_n) la probabilité que ce feu soit rouge (resp. vert) à l'instant $t = n$. On suppose que $r_0 + v_0 = 1$.

1. Montrer l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$$
2. En déduire r_n et v_n en fonction de n puis calculer leurs limites.

Exercice 11 — On effectue n tirages avec remise dans une urne contenant le même nombre de boules blanches que de boules rouges. Soit A l'événement « on tire au moins deux rouges » et B l'événement « on tire des boules des deux couleurs ».
Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

Exercice 12 — Regarder une publicité à la télévision grille chaque neurone de votre cerveau avec une probabilité de 1 pour 1000. Au bout de combien de publicités un neurone a-t-il grillé avec une probabilité de 90 % ?

Exercice 13 — Un livre contient 4 erreurs. À chaque relecture, une faute non corrigée est corrigée avec une probabilité de $1/3$. Les différentes fautes sont indépendantes les unes des autres ; les relectures successives aussi.

1. Combien faut-il de relectures pour que la probabilité qu'il ne subsiste aucune erreur soit supérieure à 0.9 ?
2. Même question en supposant que le nombre d'erreurs est uniformément réparti sur $[\![0,4]\!]$.

Partie B – Approche formelle

Exercice 14 — Écrire à l'aide des opérations ensemblistes $\cap$, $\cup$, $\overline{}$ et des événements A, B, C, …, A_1, A_2, …, A_n, … les événements suivants :

1. L'un, au moins, des événements A ou B se réalise.
2. L'un et l'un seulement des évènements A ou B se réalise.
3. A et B se réalisent mais pas C.
4. Tous les événements A_n se réalisent.
5. Il y a une infinité des événements A_n qui se réalisent.
6. Seul un nombre fini des événements se réalise.
7. Il y a une infinité des événements A_n qui ne se réalisent pas.
8. Tous les événements A_n se réalisent à partir d'un certain rang.

Exercice 15 — Les fonctions P suivantes, définies sur les singletons, se prolongent-elles en une fonction de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$?

1. $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\{k\}) = \dfrac{1}{2^k}$;
2. $\Omega = \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\{k\}) = \sin\left(\dfrac{1}{k}\right)\sqrt{1+k}$;
3. $\Omega = \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\{k\}) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

Partie C – Probabilités sur un univers dénombrable

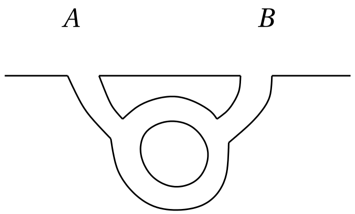
Exercice 16 — Tim et Tom disposent d'une pièce équilibrée et décident de jouer à « Pile ou Face » avec une règle un peu spéciale : ils lancent la pièce à tour de rôle ; si la séquence « FF » est observée avant la séquence « PF » alors c'est Tim qui gagne. Si c'est la séquence « PF » qui est observée avant « FF », c'est Tom.

1. Justifier que la probabilité que personne ne gagne est nulle.
2. En considérant le résultat des deux premiers lancers, montrer que Tom est plus malin que Tim...

Exercice 17 — Deux joueurs A et B jouent. A lance deux fois une pièce équilibrée. B ne lance qu'une fois une pièce qui fait « pile » avec la probabilité p. Le gagnant est celui qui fait le plus de « faces ». Tant qu'il y a égalité, ils rejouent.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait égalité au premier tour ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne le jeu ?
3. Existe-t-il un p tel que le jeu soit équitable ?

Exercice 18 — *La taupe*
Une petite taupe entre dans son terrier par l'entrée A. À chaque intersection, elle a une chance sur deux de prendre à gauche et une chance sur deux de prendre à droite.



Quelle est la probabilité qu'elle sorte en B ?

Exercice 19 — Un dimanche après-midi particulièrement maussade, Tim décide de jouer à un jeu de pile ou face : il effectue une succession de tirages (indépendants les uns des autres et ayant une probabilité $p \in]0;1[$ de retourner « pile ») ; s'il arrive un moment où il obtient deux « pile » de plus que de « face », alors il a gagné et peut aller jouer à la console avec Tom ; si en revanche il obtient deux « face » de plus que de « pile », alors il a perdu et doit terminer son DM de maths.

1. Quelle est la probabilité que la partie dure au moins $2n$ lancers ?
2. Quelle est la probabilité que Tim passe un dimanche agréable ?

Exercice 20 — On effectue des tirages dans une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne avec c boules de la même couleur.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n que la première boule blanche soit obtenue au n-ième tirage.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+kc}$.
   a) Montrer que l'on a $p_n = a_{n-1} - a_n$, pour tout $n \geqslant 2$.
   b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ et en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$. Interpréter.

Exercice 21 — *Vous reprendrez bien un peu de pile ou face...*
Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce truquée. Le joueur A commence et la pièce amène Face avec la probabilité $p \in]0;1[$. Le premier qui obtient Face gagne le jeu, qui s'arrête alors.

1. Quelle est la probabilité pour que A gagne à son n-ième lancer.
2. Quelle est la probabilité pour que A gagne ?
3. Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas ?
4. Y a-t-il une valeur de p qui assure que les deux joueurs aient la même probabilité de gagner ?

Exercice 22 — On lance deux dés jusqu'à ce qu'une somme de 5 ou 7 apparaisse.

1. Soit E_n l'événement « une somme de 5 apparaît au n-ième double lancer et sur les $n-1$ premiers doubles lancers ni la somme de 5 ni celle de 7 n'apparaît ». Calculer $\mathbf{P}(E_n)$.
2. Trouver la probabilité qu'on s'arrête sur une somme de 5.
3. Trouver la probabilité qu'on s'arrête sur une somme de 7.
4. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

Exercice 23 — On lance une pièce équilibrée n fois ($n \geqslant 2$). Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A_k désigne l'événement « on obtient pile au k-ième lancer ». Soit A_{n+1} l'événement « le nombre de piles obtenus au bout des n lancers est pair ».

1. Déterminer les probabilités des événements A_k pour $k \in [\![1, n+1]\!]$.
2. a) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right)$.
   b) En déduire que les événements $A_1, \dots, A_{n+1}$ ne sont pas mutuellement indépendants.
3. Montrer que toute sous-famille de n événements choisis parmi $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ est formée d'événements mutuellement indépendants.

Exercice 24 — Une urne contient des boules numérotées de 1 à N, $N \geqslant 3$. On effectue une suite infinie de tirages avec remise, et on note $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ la liste des numéros successifs obtenus.

1. a) Déterminer le nombre de n-uplets $(u_1, \dots, u_n)$ d'entiers de $[\![1, N]\!]$ tels que $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n$.
   b) Soit A_n l'événement « les tirage successifs amènent n premiers numéros qui vont en croissant au sens large ».
   Calculer $v_n = \mathbf{P}(A_n)$. On conviendra que $v_1 = 1$.
2. a) Montrer que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{N+n}{N\cdot(n+1)}$.
   b) En déduire qu'il existe un rang n_0 tel que :
$$\forall n \geqslant n_0 \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \frac{2}{N}$$
   c) Conclure que la série $\sum v_n$ converge.
3. On pose $w_n = v_n - v_{n-1}$.
   a) Interpréter w_n comme la probabilité d'un événement fonction de A_n et A_{n+1}.
   b) Montrer que la série $\sum w_n$ converge, calculer sa somme et interpréter.