Réduction

Travaux dirigés #03

Partie A – Pour commencer...

Exercice 1 — Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$E_2 = \mathrm{Vect}((1,2)),\ E_{-3} = \mathrm{Vect}((1,1)) \text{ où } E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$$

1. Montrer que f est diagonalisable et est un automorphisme.
2. Préciser la trace, le déterminant de f et son polynômes caractéristique.
3. Calculer $f((2,3))$.
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 2 — Soient E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$(u - 3\mathrm{id}_E) \circ (u + 2\mathrm{id}_E) = 0$$

Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 3 — Diagonaliser sans effort la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 — Réduire les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie B – Réduction matricielle

Exercice 5 —

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? $(a,b,c,d,e,f \in \mathbb{C})$

Exercice 6 — Déterminer les valeurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable ?

Exercice 7 — On considère pour un entier naturel n non nul la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{-1}{n} & \frac{n+2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{-1}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer sans calcul que 1 et $1 + \frac{1}{n}$ sont valeurs propres de A_n.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? inversible ?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n la matrice produit $B_n = A_1 A_2 \cdots A_n$.
   La matrice B_n est-elle diagonalisable ? inversible ?
   Si oui, déterminer B_n^{-1}.

Exercice 8 — Soient $A, B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $B^2 = A$.

1. La proposition « A diagonalisable $\Longleftrightarrow$ B diagonalisable » est-elle vraie ?
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
   On cherche les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = A$.
   a) Montrer que A est semblable à une matrice diagonale D.
   b) Déterminer l'ensemble des matrices C telles que $C^2 = D$.
   c) En déduire les matrices B qui conviennent.

Exercice 9 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ a_{i,j} = 1 \text{ si } i+j = n+1, a_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$$

1. Écrire A et calculer A^2
2. En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
3. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 10 — Matrices circulantes

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Calculer A^3. En déduire les valeurs propres possibles de A.
2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
3. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

   Diagonaliser M en utilisant les questions précédentes.

Exercice 11 — Soient trois suites u, v et w définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 1$ et $w_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = 3u_n - 3v_n - 2w_n \end{cases}$$

Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 12 — Déterminer toutes les suite u, v et w telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

Exercice 13 — Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2} \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 14 — Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$.

1. Trouver deux matrices B et C dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = B + (1-p-q)C \text{ et } B + C = I$$

2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Lorsqu'un feu tricolore est rouge à l'instant n, il passe au vert à l'instant $n+1$ avec une probabilité p. Lorsqu'il est vert à l'instant n, il passe au rouge à l'instant $n+1$ avec la probabilité q. On note u_n (resp. v_n) la probabilité qu'il soir rouge (resp. vert) à l'instant n.
   Expliciter u_n et v_n puis calculer leur limite respective.

Exercice 15 — On possède deux urnes. Initialement, il y a deux boules blanches dans U_1 et deux noires dans U_2. À chaque tirage, on prend une boule dans U_1 et une boule dans U_2, et on les échange. On appelle X_k le nombre de boules blanches dans U_1 après le k-ième tirage. On pose $X_0 = 2$.

1. Déterminer $X_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. On pose :

$$Y_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_k = 0) \\ \mathbf{P}(X_k = 1) \\ \mathbf{P}(X_k = 2) \end{pmatrix}$$

   Trouver une matrice A telle que $Y_{k+1} = AY_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   En déduire l'espérance de X_k.
3. Trouver trois vecteurs propres linéairement indépendants Z_1, Z_2, Z_3 de A puis décomposer Y_0 dans cette base.
4. Montrer que $Y_k = A^k Y_0$. En déduire la loi de X_k.

Exercice 16 — Diagonalisation simultanée
Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note f (resp. g) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A (resp. B). On suppose que A admet n valeurs propres distinctes et que l'on a $AB = BA$.

1. Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g et en déduire l'existence d'une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres communs à f et g.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $2M^2 + 5M = 3A$.

Partie C – Réduction d'endomorphismes

Exercice 17 — Soit $E = \mathbb{R}[X]$.
Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = (X+1)(X-3)P' - XP$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
   INDICATION : *On pourra déterminer le degré de tels vecteurs propres.*

Exercice 18 — À tout polynôme P à coefficients réels on associe le polynôme :

$$\varphi(P) = (X-1)(X-2)P' - 2XP$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que si P est un vecteur propre de φ, alors $\deg(P) = 2$.
3. Déterminer les éléments propres (valeurs propres et vecteurs propres) de φ.

Exercice 19 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = X(1-X)P' + nXP$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f
   INDICATION : *On pourra résoudre une équation différentielle.*
3. f est-elle diagonalisable ?

Exercice 20 — On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$) par :

$$\varphi(P) = nXP - (X^2-1)P'$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que la famille $(1, X-1, \dots, (X-1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer la matrice de φ dans cette base.
3. L'application φ est-elle diagonalisable ?

Exercice 21 — Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A et montrer que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
2. On cherche à trigonaliser A.
   a) Soit $u_1 \in E_1(A)$ et $u_2 \in E_2(A)$ non nuls.
   Déterminer un vecteur u_3 de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
   b) Soit $u_1' \in E_2(A)$ et $u_3' \in E_1(A)$ non nuls.
   Déterminer $u_2' \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathscr{B}' = (u_1', u_2', u_3')$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ puis montrer que :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   avec a un réel non nul à préciser.

Exercice 22 — On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit $E = \{aI_3 + bA + cA^2 ; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $A^3 \in E$.
   Montrer que $\mathscr{B} = (I_3, A, A^2)$ est une base de E.
2. Quelle équation vérifient les valeurs propres de A ?

3. Déterminer, sans calculer ses valeurs propres, si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Même question dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
5. On définit l'application Φ_A en posant pour tout $M \in E : \Phi_A(M) = AM$.
   Montrer que Φ_A est un endomorphisme de E et en donner la matrice dans $\mathscr{B}$.
   L'application Φ_A est-elle diagonalisable ?

Exercice 23 —
Pour $k \in [\![0,4]\!]$, on définit les fonctions à variable réelle : $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$.
On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1. Déterminer la dimension de E.
2. Soit $\varphi : f \mapsto f'' - 3f' + 2f$. Vérifier que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
3. Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 24 — Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. Pour toute fonction $f \in E$, on définit la fonction g par :

$$\forall x \in [0,1] \quad g(x) = \int_0^x \inf(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

On note enfin T l'application définie sur E par $T : f \mapsto g$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.
   On résoudra pour cela une équation différentielle du second ordre.