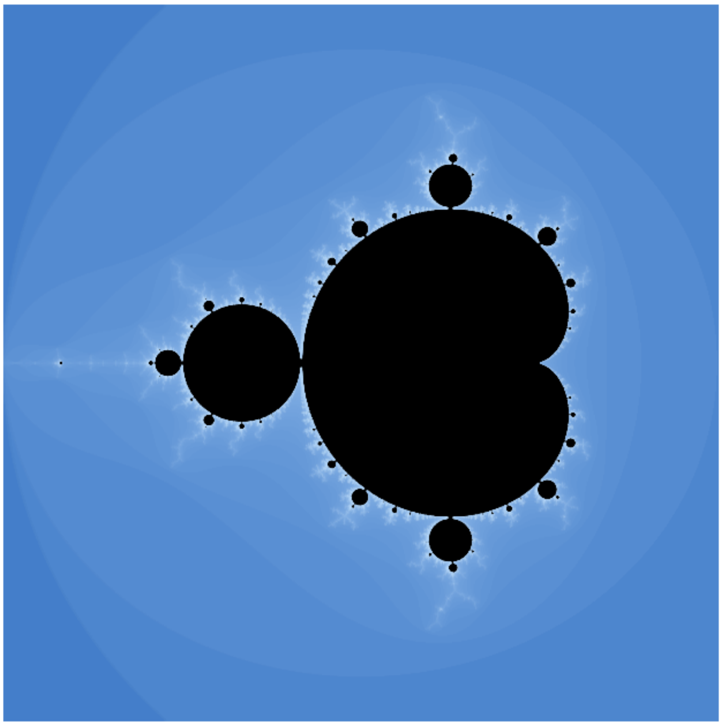
Mickaël Prost
Lycée Chaptal – Paris
mickael.prost@gmail.com
http://www.mickaelprost.fr

Mathématiques

– Résumé de cours PTSI/PT* –

★★★ 2017/2018 ★★★



« Les mathématiques sont la poésie des sciences »

Léopold Sédar Senghor (1906 – 2001)

Chapitre 1 – Continuité et dérivabilité

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

A – Continuité

Définition 1.1

f est dite continue sur I si en tout point $x_0 \in I$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *i.e.* si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I\ |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Théorème 1.2 : Théorème des valeurs intermédiaires

On suppose f continue sur I avec $a, b \in I$ vérifiant $a < b$.
Alors pour tout réel y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = y_0$.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. (TVI bis)
Une fonction continue qui change de signe sur I s'annule (au moins une fois) sur I.

Théorème 1.3 : Théorème de la borne atteinte

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

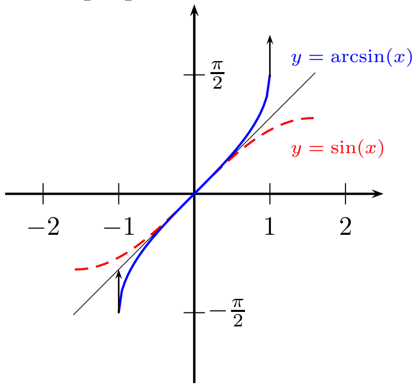
Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
On remarquera qu'en général, $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$.

Théorème 1.4 : Théorème de la bijection

Si f est continue et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.
De plus, la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et de même monotonie que f.

Le graphe de f^{-1} est symétrique à celui de f par rapport à la première bissectrice.

Définitions et propriétés des fonctions : arccos, arcsin, arctan.



Représentation de la fonction arcsin

La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle est dérivable sur $]-1, 1[$.

$$\forall x \in [-1, 1] \qquad \sin(\arcsin(x)) = x$$
$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \arcsin(\sin(x)) = x$$

La fonction arcsin est enfin impaire :

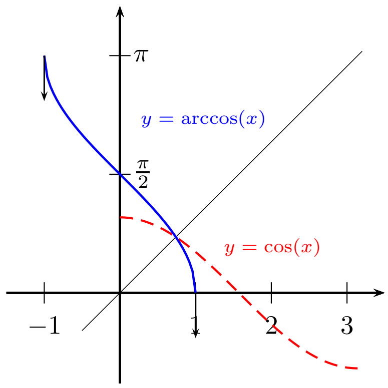
$$\forall x \in [-1, 1] \quad \arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$

La fonction arccos est définie et continue sur $[-1,1]$ et à valeurs dans $[0,\pi]$. Elle est dérivable sur $]-1,1[$.

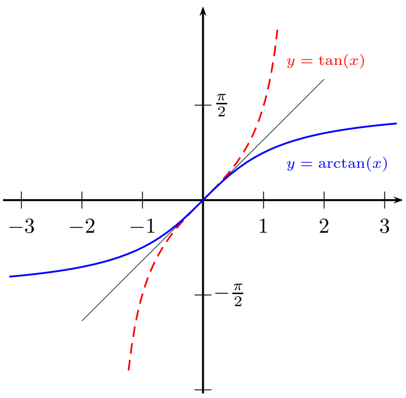
$$\forall x \in [-1,1] \qquad \cos(\arccos(x)) = x$$
$$\forall x \in [0,\pi] \qquad \arccos(\cos(x)) = x$$

La fonction arccos vérifie enfin :

$$\forall x \in [-1,1] \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$



Représentation de la fonction arccos



Représentation de la fonction arctan

La fonction arctan est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \tan(\arctan(x)) = x$$
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\qquad \arctan(\tan(x)) = x$$

La fonction arctan est impaire vérifie enfin :

$$\forall x > 0 \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

B – Dérivabilité

Définition 1.5

f est dite dérivable en $x_0 \in I$ si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ possède une limite finie en x_0.

Théorème 1.6

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0. La réciproque est fausse. ($x \mapsto |x|$)

Si f est dérivable en x_0, $f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$ où également :

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0) + hf'(x0) + o(h)$$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{gf'-fg'}{g^2}$, $(g\circ f)' = f'.(g'\circ f)$.

Théorème 1.7 : Dérivabilité de la bijection réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I et f^{-1} sa bijection réciproque. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$f^{-1'}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Les dérivées des fonctions circulaires réciproques sont à connaître.

Une fonction dérivable n'est pas nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$, comme par exemple $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en posant $f(0) = 0$. On a cependant :

Théorème 1.8 : Limite de la dérivée

Si f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et si $f'(x)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x_0 alors f est dérivable en x_0, $f'(x_0) = \ell$ et f' est continue en x_0.

Théorème 1.9 : Formule de Leibniz

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. Alors, fg est également de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Théorème 1.10 : Théorème de Rolle

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe $x \in]a, b[$ tel que $f'(x) = 0$.

Théorème 1.11 : Accroissements finis

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Si $|f'|$ est majorée par un réel M sur $]a, b[$, on a alors (inégalité des accroissements finis) :

$$\forall x, y \in I,\ |f(y) - f(x)| \leqslant M|x - y|.$$

Application classique à l'étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Théorème 1.12 : Formules de Taylor

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $a, b \in I$.

- Formule de Taylor avec reste intégral

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$$

- Inégalité de Taylor-Lagrange

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M \frac{(b-a)^n}{n!} \qquad \text{avec } M = \sup_{[a,b]} |f^{(n)}|$$

- Formule de Taylor-Young

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{o}((b-a)^n)$$

Ces formules sont utiles pour déterminer un développement limité, pour justifier l'existence d'un développement en série entière, *etc.*

C – Développements limités et équivalents

Définition 1.13

On dit que $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont équivalentes au voisinage de x_0 si :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$$

pour g ne s'annulant pas au voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0.

Définition 1.14

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 et on note $f(x) \underset{x \to x_0}{=} \mathrm{o}(g(x))$ si :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

pour g ne s'annulant pas au voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0.

Proposition 1.15 : Lien entre $\sim$ et o

$f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) \underset{x \to x_0}{=} g(x) + \mathrm{o}(g(x))$.

Définition 1.16 : Développement limité

On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$$

À connaître : Opérations usuelles sur les développements limités, intégration terme à terme (sans oublier le terme constant), utilisation de la formule de Taylor-Young...

Chapitre 2 – Intégration

A – Intégration sur un segment

1 – Propriétés

On définit l'intégrale de toute fonction f continue sur $[a,b]$ en approchant f par des fonctions en escalier.

Théorème 2.1

Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f$ existe.

Quelques propriétés de l'intégrale : $(f,g$ continues sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R})$

- Linéarité : $\displaystyle\int_a^b \lambda f + g = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$.
- Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ pour $c \in [a,b]$.
- Positivité : $f \geqslant 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$ (seulement pour $a < b$)
- Croissance : $f \leqslant g \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$ (seulement pour $a < b$)
- Inégalité : $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f|$ (seulement pour $a < b$)

Théorème 2.2

Soit f une fonction *positive* et *continue* sur $[a,b]$.

$$\int_a^b f = 0 \Longleftrightarrow f \text{ est identiquement nulle sur } [a,b].$$

2 – Primitives

Définition 2.3

Une primitive de f (continue sur un intervalle I) est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Théorème 2.4

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I et $c \in I$.

- $x \mapsto \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en c.
- Si F est une primitive de f sur I, $\displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(c)$.

3 – Recherche de primitives

Il existe de nombreuses façons de calculer des primitives. En voici quelques unes.

- Reconnaissance de formes usuelles.
  Ex. : $f'f^{\alpha}$ se « primitive » en $\dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$, en $\ln|f|$ si $\alpha = -1$.
- Intégration par parties
  Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$.
- Changement de variables
  Si $f : J \to \mathbb{R}$ est continue et $\varphi : [a,b] \to J$ de classe $\mathscr{C}^1$ alors $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.
- Fractions rationnelles
  Intégration directe lorsqu'elles sont du type $\dfrac{1}{(x-a)^n}$.
  Sinon, on peut procéder à une décomposition en éléments simples.
- Fractions rationnelles en exp
  On pose $u = \mathrm{e}^x$.
- Produit d'un polynôme par une exponentielle
  On effectue des intégrations par parties successives jusqu'à éliminer le polynôme.
- Produit d'un polynôme trigonométrique par une exponentielle
  On passe en complexe.

4 – Calcul approché d'intégrales

La méthode des rectangles est à connaître.

Théorème 2.5 : Sommes de Riemann

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ (et même seulement continue) sur $[a,b]$. Alors,

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $a = 0$ et $b = 1$, on trouve :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

B – Intégrales généralisées

I désigne désormais un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

1 – Définition

Définition 2.6

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.
Si $\displaystyle\int_a^x f$ admet une limite finie lorsque x tend vers b^-, on dit que l'intégrale impropre converge et on note $\displaystyle\int_a^b f$ cette limite. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Il y a deux types d'intégrales impropres : l'intégrale de fonctions non bornées sur un intervalle borné ($x \mapsto \ln x$ sur $]0,1]$) et celle de fonctions continues sur un intervalle non borné ($x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0,+\infty[$).
On peut étendre la définition précédente au cas $]a,b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a=-\infty$. Lorsqu'on a un intervalle du type $]a,b[$ on découpe l'intégrale en deux.

2 – Étude de la nature d'une intégrale

On peut quelques fois calculer une primitive et passer à la limite pour prouver la convergence/divergence.

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.
- $\displaystyle\int_0^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$ converge.

Si une fonction $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ avec $b \in \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b[$ et prolongeable par continuité en b, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge et vaut $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}$ où l'on a noté $\tilde{f}$ le prolongement de f.

On dispose de plusieurs méthodes lorsque la fonction est positive (ou tout du moins de signe constant).

Théorème 2.7 : Comparaison

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I telles que $0 \leqslant f \leqslant g$. Alors,

$$\int_I g \text{ converge} \Longrightarrow \int_I f \text{ converge} \quad \text{et} \quad \int_I f \text{ diverge} \Longrightarrow \int_I g \text{ diverge.}$$

Théorème 2.8 : Équivalents

Soit $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I, de signe constant au voisinage de b, telles que $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$. Alors, $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.

Théorème 2.9 : Comparaison séries/intégrales

Soit f une application continue, positive et décroissante sur $[a,+\infty[$.
Alors la série $\sum f(n)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Il existe d'autres méthodes lorsque la fonction ne garde pas de signe constant sur I.

Théorème 2.10 : Divergence grossière à l'infini

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux.
Si f admet une limite non nulle en $+\infty$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Contrairement aux séries, on ne peut rien dire lorsque la limite n'existe pas.

Définition 2.11

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$.
On dit que $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente lorsque $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge.
Si $\displaystyle\int_a^b f$ converge et $\displaystyle\int_a^b |f|$ diverge, on dit que $\displaystyle\int_a^b f$ est semi-convergente.

Théorème 2.12 : CV absolue $\Longrightarrow$ CV

Une intégrable absolument convergente est convergente.

3 – Calcul intégral

On se placera sur un segment avant d'utiliser une intégration par parties, quitte à passer à la limite.

Théorème 2.13 : Changement de variable sur un intervalle quelconque

Soient f une fonction continue sur $]a, b[$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et en cas de convergence, elles sont égales.

Un théorème analogue s'applique lorsque φ est supposée strictement décroissante.

4 – Fonctions intégrables

Définition 2.14

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur I est dite intégrable si $\int_I f$ est absolument convergente.

Étudier l'intégrabilité de f sur I revient à étudier une intégrale classique sur le segment I ou à étudier la convergence *absolue* d'une intégrale impropre.

Théorème 2.15

L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I est un espace vectoriel.

Les propriétés de linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles et inégalité triangulaire sont encore vérifiées lorsqu'on travaille avec des fonction intégrables sur un intervalle I quelconque.

Théorème 2.16 : Règle du petit o et du grand O

Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$. On suppose la fonction g continue et intégrable sur $[a, b[$.

- si $f \underset{b^-}{=} \mathrm{o}(g)$ alors f est intégrable sur $[a, b[$;
- si $f \underset{b^-}{=} \mathrm{O}(g)$ alors f est intégrable sur $[a, b[$.

C – Intégrales à paramètre

On s'intéresse aux fonctions du type $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ avec $f : I \times J \to \mathbb{R}$.

$x \in \mathscr{D}_g \iff \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ existe. Si J est un segment, il suffira de vérifier que $t \mapsto f(x,t)$ est continue.
Si l'intégrale est impropre, il faudra s'intéresser à sa convergence.

Théorème 2.17 : Continuité sous le signe $\int$

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle ou complexe définie sur $I \times J$ telle que :

- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur J.
- Il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$ continue et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{(hypothèse de domination)}$$

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

L'hypothèse de domination peut simplement être vérifiée sur tout segment K inclus dans I, *i.e.* :

$$\forall (x,t) \in K \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_K(t)$$

Si $J = [a,b]$ est un segment et si f est continue sur $I \times [a,b]$, la domination sur tout segment sera automatiquement vérifiée (à justifier).

Théorème 2.18 : Dérivabilité sous le signe $\int$

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle ou complexe définie sur $I \times J$ telle que :

- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J.
- Il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$ continue et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall x \in I \quad g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

On peut là encore se contenter d'une domination sur tout segment inclus dans I.
L'hypothèse de domination est automatiquement vérifiée lorsque J est un segment.

Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: on opère en plusieurs fois sur f', f'', ... ou bien on raisonne par récurrence.

Chapitre 3 – Équations différentielles

A – Équations différentielles linéaires

1 – Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante et l'équation homogène associés :

$$a(t)y' + b(t)y = c(t) \quad (E)\,; \quad a(t)y' + b(t)y = 0 \quad (H)$$

On suppose que $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ sont continues sur un *intervalle* I de $\mathbb{R}$.

Théorème 3.1 : Problème de Cauchy

Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy $\begin{cases} a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur I.

Théorème 3.2 : Structure de l'ensemble des solutions

- L'équation homogène $y' + f(t)y = 0$ admet pour solution générale $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-F(t)}$ où F est une primitive de f sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de (H) est $\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}(t \mapsto \mathrm{e}^{-F(t)})$.
- L'équation $y' + f(t)y = b(t)$ admet pour solution générale $t \mapsto y_0(t) + \lambda \mathrm{e}^{-F(t)}$ où y_0 est une solution particulière de l'équation avec second membre.

Plan de résolution :

- Identification de l'équation.
- Mise sous forme résolue en divisant par $a(t)$ sur les intervalles où a ne s'annule pas.
- Résolution de l'équation homogène : $y' = f(t)y$. (f continue)
  La solution générale de l'équation homogène est $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{F(t)}$ où F est une primitive de f sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Résolution de l'équation avec second membre.
  On recherche pour cela une solution particulière y_0 de (E). S'il n'y a pas de solution évidente, on utilisera la méthode de variation de la constante en cherchant y sous la forme $y(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^{F(t)}$.
  La solution générale de l'équation (E) est $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{F(t)} + y_0(t)$.
- Raccordement éventuel des solutions.
- Conditions initiales.

2 – Équations différentielles linéaires d'ordre 2

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante et l'équation homogène associés :

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \quad (E)\,; \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \quad (H)$$

On suppose que $a, b, c, d : I \to \mathbb{R}$ sont continues sur un *intervalle* I de $\mathbb{R}$.

Théorème 3.3 : Problème de Cauchy

Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy $\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \\ y(t_0) = y_0 ; y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur I.

Théorème 3.4 : Structure de l'ensemble des solutions

Lorsque $a : I \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I, l'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de (H) est un plan vectoriel. L'ensemble $\mathscr{S}_E$ des solutions de (E) est un plan affine de direction $\mathscr{S}_H$.

Résolution lorsque les coefficients de (H) sont constants :

On résout l'équation caractéristique $aX^2 + bX + c = 0$ de discriminant associé Δ.

- Si $\Delta > 0$, deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. $y(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 t}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, une racine réelle double r. $y(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^{rt}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$. $y(t) = (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t))\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

On peut déterminer une solution particulière de (E) lorsque le second membre $d(t)$ est de la forme :

- $d(t) = P(t)\mathrm{e}^{mt}$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$, on cherche y_0 sous la forme $y_0(t) = Q(t)\mathrm{e}^{mt}$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(Q) = \deg(P) + k$, k étant l'ordre de multiplicité de m en tant que racine de l'équation caractéristique.
- $d(t) = \cos(\omega t)$, on passe en complexe et on retrouve le cas précédent.

On pourra utiliser le principe de superposition.

Résolution lorsque les coefficients de (H) ne sont pas constants : (on se laisse guider par l'énoncé)

- Recherche de solutions polynomiales (on commence par l'étude du degré).
- Recherche de solutions développables en série entière.
- Recherche d'une solution sous la forme $y(t) = z(t)y_0(t)$ où y_0 est une solution déjà connue (méthode dite de Lagrange).
- Changement de variables ou d'inconnues.

B – Systèmes linéaires à coefficients constants

On considère le système linéaire suivant : $\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p + b_1 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p + b_2 \\ \quad\vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p + b_n \end{cases}$

On l'écrit sous la forme $X' = AX + B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad X \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$$

Théorème 3.5 : Problème de Cauchy

Le problème de Cauchy $X' = AX + B$ et $X(t_0) = X_0$ pour $t_0 \in I$ admet une unique solution sur I.

Théorème 3.6 : Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de $X' = AX$ est un sous-espace vectoriel (de dimension n) de $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{K}^n)$.

Pour résoudre l'équation $X' = AX$, on essaye de diagonaliser A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Si cela ne fonctionne pas, on trigonalise A.

Théorème 3.7 : Structure de l'ensemble des solutions

On suppose que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(X_1,\dots,X_n)$ une base de vecteurs propres associées aux valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ et on note P la matrice de passage correspondante. La solution générale de l'équation $X' = AX$ est :

$$X(t) = P\begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t}\end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} X_n \text{ avec } c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}.$$

Si A est une matrice réelle et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A, on écrira les solution sous la forme $a\mathrm{Re}(e^{\lambda t} X_\lambda) + b\mathrm{Im}(e^{\lambda t} X_\lambda)$. À noter, le calcul de P^{-1} est inutile.

Chapitre 4 – Suites numériques

A – Suites classiques

- Suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

- Suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

- Suite arithmético-géométrique
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = au_n + b \quad (a \neq 1) \end{cases}$$
On note ℓ le point fixe de la suite : $\ell = a\ell + b$ donc $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.
$(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a donc $u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$.
- Suite récurrente linéaire d'ordre 2
$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$
On résout l'équation caractéritique $X^2 - aX - b = 0$ de discriminant associé Δ.
— Si $\Delta > 0$ alors on obtient deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.
$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
— Si $\Delta = 0$ alors on obtient une racine double r.
$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + n\mu) r^n$.
— Si $\Delta < 0$ alors on obtient deux racines complexes conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$.
$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \rho^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$.

B – Convergence des suites numériques

Définition 4.1

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$
On dit qu'elle diverge vers $+\infty$ si,
$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow u_n > A$$

Rappel : Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Théorème 4.2 : Théorème de la limite monotone

Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.

Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
Une suite convergente est nécessairement bornée mais la réciproque est fausse : $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$.
Outre les théorèmes de comparaison et des gendarmes, les deux théorèmes suivants sont à connaître.

Théorème 4.3 : Suites adjacentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant :
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.
- $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Théorème 4.4 : Suites extraites

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors toute suite extraite (du type $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) converge vers ℓ.

C – Relations de comparaison

Définition 4.5 : Équivalence, négligeabilité et domination

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques où $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On dit que :
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$. Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\dfrac{u_n}{v_n}$ est borné. Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite ℓ. De plus, si deux suites sont équivalentes, les termes généraux sont de même signe à partir d'un certain rang.

Rappelons les résultats classiques dits de « croissances comparées » pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln^\alpha(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^\beta); \quad n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^{\beta n}) \text{ et même pour } x > 1,\ n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^{\beta n})$$

Théorème 4.6 : Lien entre équivalence et négligeabilité

Pour deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + \mathrm{o}(v_n)$$

Chapitre 5 – Séries numériques

A – Quelques sommes classiques à connaître

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$. Si $q=1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$.

$\displaystyle(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. En particulier, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$.

B – Convergence des séries numériques

Définition 5.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- On appelle somme partielle au rang n le terme $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
- On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On la note $\sum u_n$.
- Lorsque la suite (S_n) converge, on dit que la série de terme général u_n converge et on appelle *somme de la série* la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notation : $\displaystyle S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Lorsqu'elle converge, on appelle reste au rang n la différence $\displaystyle R_n = S - S_n = \sum_{k>n} u_k$.

On ne modifie pas la nature d'une série en modifiant ses premiers termes.
Voici les techniques au programme permettant de montrer qu'une série converge/diverge.

1 – Divergence grossière

Théorème 5.2

Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple $\sum \frac{1}{n}$.

Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, la série diverge (de manière grossière).

2 – Calcul direct

Théorème 5.3 : Série géométrique

$\sum x^n$ converge si et seulement si $x \in]-1,1[$. Dans ce cas, sa somme vaut $\dfrac{1}{1-x}$.

On peut également prouver la convergence de séries à l'aide de sommes télescopiques.
De plus, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.

3 – Cas des séries à termes positifs

Théorème 5.4

On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes positifs.
Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors la série converge. Sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Théorème 5.5 : Comparaison

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

- $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.
- $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge.

Théorème 5.6 : Équivalents

On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes positifs.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Théorème 5.7 : Règle de d'Alembert

On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes *strictement positifs* à partir d'un certain rang et que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

- Si $\ell < 1$, la série converge.
- Si $\ell > 1$, la série diverge.
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Théorème 5.8 : Comparaison séries/intégrales

Soit f une application continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$.
Alors la série $\sum f(n)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Une application directe de ce théorème nous donne de nouvelles séries de référence.

Théorème 5.9 : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

4 – Convergence absolue

Définition 5.10

On dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 5.11 : CV abs $\Longrightarrow$ CV

Une série absolument convergente est convergente.

La réciproque est fausse. On appelle série semi-convergente une série convergente qui n'est pas absolument convergente.

Théorème 5.12 : Règles du petit o **et du grand O**

Soient $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à termes positifs.
Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ ou $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge (absolument).

5 – Produit de Cauchy

Théorème 5.13 : Produit de Cauchy

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument alors leur produit de Cauchy converge (absolument) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) \quad \text{avec } w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Chapitre 6 – Séries entières

Définition 6.1

Une série entière à variable réelle ou complexe z est une série de la forme $\sum a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{K}$.

On appelle domaine de convergence le domaine de définition de la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

A – Rayon de convergence

1 – Définition et propriétés

Définition 6.2

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ l'élément $R \in \overline{\mathbb{R}}_+$ défini par :

$$R = \sup\{r \geqslant 0 \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

Théorème 6.3

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- Si $|z| < R$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$ alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
- Si $|z| = R$ alors on ne peut rien dire.

Lorsque z est une variable réelle, on parle d'intervalle ouvert de convergence et lorsque z est une variable complexe, on parle de disque ouvert de convergence.

2 – Détermination pratique du rayon de convergence

Théorème 6.4 : Encadrement du rayon de convergence

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$.

- Si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $|z_0| \leqslant R$
- Si $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $|z_0| \geqslant R$.
- Si $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente, alors $|z_0| = R$. On est sur le cercle de convergence.

Théorème 6.5 : Comparaison

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b telles que $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang. Alors, $R_a \geqslant R_b$.

Théorème 6.6 : Équivalent

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières telles que $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$.
Alors elles ont même rayon de convergence.

Théorème 6.7

Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

On appliquera également la règle de d'Alembert (pour une série numérique à termes strictement positifs).

3 – Opérations sur les séries entières

Théorème 6.8

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

(i) $\sum (a_n + b_n) z^n$ est une série entière de rayon de convergence R avec $R = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ ou $R \geqslant R_a$ si $R_a = R_b$.

(ii) $\sum \lambda a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R_a si $\lambda \neq 0$ ou $+\infty$ si $\lambda = 0$.

(iii) Le produit de Cauchy des deux séries est une série entière de la forme $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et son rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

B – Propriétés de la somme d'une série entière réelle

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$.
On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. La fonction f est définie sur $]-R,R[$, $]-R,R]$, $[-R,R[$ ou $[-R,R]$.

Théorème 6.9 : Continuité

La fonction f est continue sur l'intervalle ouvert de convergence.

Théorème 6.10 : Dérivation terme à terme

f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, $\sum n a_n x^{n-1}$ est une série entière de rayon de convergence R et :

$$\forall x \in]-R,R[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Théorème 6.11 : Intégration terme à terme

On note F une primitive de f. $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est une série entière de rayon de convergence R et :

$$\forall x \in]-R,R[,\ F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

C – Développements en série entière

Définition 6.12

Une application est développable en série entière sur $]-r,r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R avec $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Théorème 6.13

Si f admet un développement en série entière sur $]-r,r[$ alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$, son développement en série entière est unique et est donné par sa série de Taylor : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

La réciproque est fausse : toute fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ n'est pas développable en série entière.

Détermination pratique d'un développement en série entière :

- Utilisation des développements usuels. (à connaître par cœur, *cf.* formulaire)
- Dérivation et intégration terme à terme.
- Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral.
- Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.
- Utilisation d'une équation différentielle.

Chapitre 7 – Algèbre linéaire

A – Matrices

1 – Puissances de matrices

Pour calculer les puissances successives d'une matrice M, on peut, par exemple,
- Diagonaliser la matrice M.
- Utiliser la formule du binôme de Newton

  Si A et B *commutent* alors $M^p = (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ pour $p \in \mathbb{N}$ quelconque.
- Avoir recours à un polynôme annulateur de M.

2 – Inversion de matrices

Définition 7.1

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

Il suffit en fait que $AB = I_n$ pour que $BA = I_n$.

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est inversible } \iff \det(A) \neq 0 \iff \mathrm{rg}(A) = n$$

Pour inverser une matrice, on peut, au choix,
- Résoudre le système linéaire associé à l'aide du pivot de Gauss.
- Appliquer les opérations élémentaires sur la matrice jusqu'à obtenir l'identité.
- Utiliser un polynôme annulateur.

3 – Matrices semblables

Définition 7.2

On dit que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$B = P^{-1}AP$$

Deux matrices semblables ont même rang, même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique donc même valeurs propres. Elles représentent la même application linéaire dans deux bases différentes.

4 – Trace et transposée

Définition 7.3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ et $A^T = {}^tA = (a_{j,i})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. La trace est la somme des valeurs propres de A (spectre complexe). Une matrice et sa transposée ont même rang et même déterminant.

B – Systèmes d'équations linéaires

On considère le système d'équations linéaires suivant : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$

On lui associe la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Le système peut se réécrire sous la forme : $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Un tel système admet 0, 1 ou une infinité de solutions.
Lorsqu'il n'admet pas de solution, on dit qu'il est incompatible. On dit qu'il est de Cramer lorsque $n = p$ et qu'il admet une unique solution $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$.

C – Espaces vectoriels

On considère un $\mathbb{K}$-e.v. E et $F \subset E$.

Définition 7.4

F est un sous-espace vectoriel de E ssi $\begin{cases} 0_E \in F \\ \forall x, y \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x + y \in F \end{cases}$

Quelques exemples classiques d'espaces vectoriels : $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{K}^n, \mathbb{K}[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, *etc.* munis des lois usuelles. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

1 – Famille de vecteurs

Soit $u_1, \ldots, u_n \in E$. $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$.
C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $u_1, \ldots, u_n$.

Définition 7.5

On dit que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille génératrice de F si $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

Autrement dit, pour tout $x \in F$, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$.

$\hookrightarrow$ Existence de la décomposition.

Définition 7.6

On dit que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille libre de F si

$$\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

$\hookrightarrow$ Unicité de la décomposition.

Une famille de deux vecteurs est libre lorsqu'ils ne sont pas colinéaires. Cette propriété est fausse dès qu'il y a plus de deux vecteurs.
Une famille infinie de vecteurs de E est libre ssi toute sous-famille est libre.

Définition 7.7

Soit E un espace vectoriel.

- Une base de E est une famille libre et génératrice.
- Un espace de dimension finie est un espace qui admet une famille génératrice finie, donc une base finie.
- Toutes les bases d'un espace E de dimension finie ont même cardinal. On l'appelle dimension de E.

Théorème 7.8

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille génératrice de E.

- $\mathscr{F}$ contient une sous-famille qui est une base de E.
- $\text{Card}(\mathscr{F}) \geqslant n$ et si $\text{Card}(\mathscr{F}) = n$, c'est une base de E.

Théorème 7.9 : Théorème de la base incomplète

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille libre de E.

- On peut compléter $\mathscr{F}$ en une base de E.
- $\text{Card}(\mathscr{F}) \leqslant n$ et si $\text{Card}(\mathscr{F}) = n$, c'est une base de E.

Soit $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une une famille de vecteurs de E. $\text{rg}\,\mathscr{F} = \dim \text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$.

Théorème 7.10

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

- $\text{rg}\,\mathscr{F} \leqslant n$ et $\text{rg}\,\mathscr{F} \leqslant p$.
- $\text{rg}\,\mathscr{F} = n$ ssi la famille est génératrice.
- $\text{rg}\,\mathscr{F} = p$ ssi la famille est libre.

Théorème 7.11

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

$$(u_1, \ldots, u_n) \text{ est une base de } E \iff \text{rg}(u_1, \ldots, u_n) = n \iff \det(u_1, \ldots, u_n) \neq 0.$$

2 – Sommes directes

F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E (généralement de dimension finie).

Définition 7.12

On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
On note alors $E = F \oplus G$.

Un supplémentaire n'est pas unique. Rappel : dans un espace euclidien E, $E = F \oplus F^{\perp}$.
On rappelle que $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$ lorsque E et F sont de dimension finie.

Théorème 7.13 : Caractérisation des sommes directes en dim. finie

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si l'une des propositions suivantes est vérifiées :
- $\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in F \times G,\ x = x_1 + x_2$.
- $\dim F + \dim G = \dim E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
- $\dim F + \dim G = \dim E$ et $E = F + G$.

Si $E = F \oplus G$ et si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F, $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de G, alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E appelée base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

Définition 7.14 : Somme de p sous-espaces

On appelle somme de $F_1, \dots, F_p$ l'ensemble noté $F_1 + \cdots + F_p$ ou bien $\sum_{i=1}^{p} F_i$ défini par :

$$F_1 + \cdots + F_p = \{x_1 + \cdots + x_p \mid (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p\}$$

Définition 7.15 : Somme directe

Les espaces $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe lorsque la décomposition de tout vecteur de $F_1 + \cdots + F_p$ comme somme de vecteurs des sous-espaces F_i est unique. On la note alors $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ ou bien $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Théorème 7.16 : Caractérisation de la somme directe

Les sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe si et seulement si la décomposition du vecteur nul comme somme de vecteurs des sous-espaces F_i est unique.

La concaténation de bases des espaces F_i est alors de nouveau une base de E.

3 – Hyperplans

Définition 7.17 : Hyperplan

On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E admettant une droite comme supplémentaire. Autrement dit, si H est un hyperplan de E, il existe $u \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(u)$.

Théorème 7.18 : Caractérisation d'un hyperplan en dimension finie

On suppose E de dimension n. H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

Proposition 7.19 : Intersection de p hyperplans

Soit E un espace de dimension n et p un entier inférieur ou égal à n.

(i) L'intersection de p hyperplans de E est un sous-espace de dimension au moins $n - p$.

(ii) Tout sous-espace de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans de E.

D – Applications linéaires

1 – Généralités

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Définition 7.20

On dit que f est une application linéaire de E dans F si :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

On note $\mathscr{L}(E,F)$ le $\mathbb{K}$-e.v. des applications linéaires de E dans F.

Définition 7.21

- Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans lui-même.
  On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
- Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.
  On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
- Une forme linéaire est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 7.22

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$.
- $\operatorname{Im} f = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E\ y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in E\}$.

$\operatorname{Ker} f$ est un s.e.v. de E et $\operatorname{Im} f$ un s.e.v de F. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Théorème 7.23

f est injective ssi $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et f est sujective ssi $\operatorname{Im} f = F$.

Par définition, $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$.

Théorème 7.24 : Théorème du rang

On suppose que E est de *dimension finie* et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$.

Théorème 7.25

Soit f un *endomorphisme* de E de *dimension finie*. Alors,

$$f \text{ injective} \iff f \text{ sujective} \iff f \text{ bijective}$$

Théorème 7.26

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. f est un ismorphisme si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $f(\mathscr{B})$ soit une base de F.
L'image d'une base de E par f est alors une base de F et $\dim E = \dim F$.

2 – Formules de passage et changement de base

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On note $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (ses colonnes représentent les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$).

Théorème 7.27 : Formules de passage

- Soit $x \in E$. On note X (resp. X') le vecteur coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$).

$$X = PX' \quad i.e. \quad X' = P^{-1}X$$

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note M (resp. M') la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$).

$$M' = P^{-1}MP$$

Ne pas oublier que pour déterminer X' en fonction de X, on doit inverser un système. D'où la présence de P^{-1} dans la formule $X' = P^{-1}X$.

3 – Endomorphismes induits

Définition 7.28

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On suppose que F est un s.e.v. de E stable par $f \in \mathcal{L}(E)$, *i.e.* $f(F) \subset F$. $f_{|F}$ est alors un endomorphisme de F appelé endomorphisme induit.

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E, on a alors :

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat} f_{|F} & \times \\ 0 & \times \end{pmatrix}.$$

Si $E = F \oplus G$ et si F et G sont stables par f, on aura dans une base *adaptée* :

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat} f_{|F} & 0 \\ 0 & \mathrm{Mat} f_{|G} \end{pmatrix}.$$

4 – Projections et symétries vectorielles

Définition 7.29

Soit $E = F \oplus G$. Si $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.

- On appelle projection sur F parallèlement à G l'application linéaire p vérifiant :

$$\forall x \in E,\ p(x) = x_1.$$

- On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application linéaire s vérifiant :

$$\forall x \in E,\ s(x) = x_1 - x_2.$$

Théorème 7.30 : Caractérisation des projecteurs et des symétries

Soit $p, s \in \mathcal{L}(E)$.

- p est une projection vectorielle sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$ si et seulement si $p \circ p = p$.
  On a alors $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.
- s est une symétrie vectorielle par rapport $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ si et seulement si $s \circ s = \mathrm{id}_E$. On a alors $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ (resp. $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$), la matrice de p (resp. s) est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Si $\mathrm{Tr}(p) = r$ alors $\dim \mathrm{Im}\, p = r$, $\dim \mathrm{Ker}\, p = n - r$ et $\chi_p = (X-1)^r X^{n-r}$. p est diagonalisable.
Si $\dim \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) = r$, $\dim \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = n - r$ et $\chi_s = (X-1)^r (X+1)^{n-r}$. s est diagonalisable.

Si $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$, tout vecteur x de E se décompose de façon unique sous la forme $x = x_1 + \cdots + x_n$ où $x_i \in E_i$. Notons alors, pour $i \in [\![1, n]\!]$, p_i l'application définie sur E par $p_i(x) = x_i$.

Théorème 7.31

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, p_i est la projection vectorielle sur E_i parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} E_k$. De plus,

$$p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad \forall i \neq j \quad p_i \circ p_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

Chapitre 8 – Déterminant

A – Déterminant d'une matrice carrée

Définition 8.1

On admet qu'il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée déterminant, telle que :

— le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes ;
— l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 ;
— le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.

On la note det.

Théorème 8.2

Si les colonnes d'une matrice sont liées, alors le déterminant de la matrice est nul.

Parmi les propriétés les plus importantes, on peut citer :

- $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Si c'est le cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A^T) = \det(A)$.
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- Deux matrices semblables ont même déterminant.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_{i,j}$ la matrice obtenue en ôtant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Théorème 8.3 : Développement par rapport à une ligne / à une colonne

- $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \det A = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) a_{i,j}$ (développement / ligne i)
- $\forall j \in [\![1, n]\!] \quad \det A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) a_{i,j}$ (développement / colonne j)

B – Déterminant d'un endomorphisme

E désigne désormais un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Définition 8.4

Le déterminant d'un endomorphisme f de E est celui de sa matrice dans une base quelconque.

Théorème 8.5

- $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.
- $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$.
- $f \in \mathcal{GL}(E)$ si et seulement si $\det f \neq 0$. Dans ce cas, $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Pour calculer un déterminant, on se ramènera toujours à un calcul de déterminant de matrice.

C – Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 8.6

Soient une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E et une base $\mathscr{B}$ de E. On appelle déterminant de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ le déterminant de la matrice représentative de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ dans la base $\mathscr{B}$. On le note $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n)$.

Théorème 8.7

Soit $\mathscr{B}$ une base quelconque de E.

- $(u_1, \ldots, u_n)$ liée $\Longleftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) = 0$;
- $(u_1, \ldots, u_n)$ libre $\Longleftrightarrow (u_1, \ldots, u_n)$ base de $E \Longleftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$.

D – Orientation de l'espace et produit mixte

Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien de dimension n. Si $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont deux bases orthonormées de E, la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$ est orthogonale. Si son déterminant vaut $+1$, on dit que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ définissent la même orientation. Orienter E consiste à choisir une base orthonormée privilégiée de E.

Définition 8.8

Soit $x_1, \ldots, x_n$ n vecteurs de E et $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de E.
On appelle produit mixte de ces n vecteurs le scalaire $[x_1, \ldots, x_n] = \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$.
Il est indépendant de la base orthonormée directe choisie.

Le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ représente en dimension 2 l'aire algébrique du parallèlogramme défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le déterminant de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ représente en dimension 3 le volume algébrique du parallélépipède défini par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Chapitre 9 – Réduction d'endomorphismes

A – Éléments propres d'un endomorphisme

1 – Définitions

Définition 9.1

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-e.v.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f associé au vecteur propre $x \in E$ si :

$$f(x) = \lambda x \text{ avec } x \neq 0_E.$$

  Le spectre de f l'ensemble des valeurs propres de f dans $\mathbb{K}$ quand E est de dim. finie.
- On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ l'espace vectoriel $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$.

Théorème 9.2

- La somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.
- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

2 – Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

On suppose que E est de dimension finie et on considère un endomorphisme f de E.

Définition 9.3

On appelle polynôme caractéristique de f le polynôme $\chi_f = \det(X\mathrm{id}_E - f)$.

Théorème 9.4

- λ est valeur propre de f si et seulement si λ est racine de χ_f.
- χ_f est de la forme :

$$\chi_f = X^n - \mathrm{Tr}(f)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(f)$$

  La somme des valeurs propres (complexes) vaut $\mathrm{Tr}(f)$ et leur produit $\det(f)$.

Si E est un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension n alors f admet exactement n valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité. Lorsque E est un $\mathbb{R}$-e.v., elle en admet au plus n.

Théorème 9.5

Soit λ une valeur propre de f d'ordre de multiplicité $m(\lambda)$. Alors,

$$1 \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)) \leqslant m(\lambda)$$

Si λ est racine simple, alors $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ est de dimension 1.

B – Diagonalisation d'un endomorphisme

Définition 9.6

- Un endomorphisme f de E est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.
- Une matrice est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Un endormorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de vecteurs propres de f. Dans cette base, la matrice de f est diagonale.

Théorème 9.7 : Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité

$$
\begin{aligned}
f \text{ est diagonalisable} \quad &\iff \quad E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda \quad \iff \quad \dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda) \\
&\iff \quad \chi_f \text{ est scindé et, pour tout } \lambda \in \mathrm{Sp}(f),\ \dim E_\lambda = m(\lambda)
\end{aligned}
$$

Théorème 9.8 : Condition suffisante de diagonalisabilité (1)

Si χ_f est scindé et n'admet que des racines simples alors f est diagonalisable.

Théorème 9.9 : Condition suffisante de diagonalisabilité (2)

Une matrice symétrique réelle est diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale.

Plan de diagonalisation (hors cas particuliers) :

- Étude de la diagonalisabilité de f.
  - On détermine χ_f.
  - Si χ_f n'est pas scindé, f n'est pas diagonalisable.
  - Si χ_f est scindé, on compare $\dim E_\lambda$ et $m(\lambda)$.
    À ce stade, on n'a pas besoin de déterminer une base de E_λ.
    On remarquera que $\dim E_\lambda = n - \mathrm{rg}(M - \lambda I_n)$. (théorème du rang)
- Diagonalisation de f lorsque c'est possible.
  On détermine une base de E_λ pour chaque valeur propre en résolvant l'équation $MX = \lambda X$ et on concatène les bases obtenues.

C – Trigonalisation d'un endomorphisme

Définition 9.10 : Trigonalisabilité

- Un endomorphisme f de E est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
- Une matrice est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème 9.11

f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Toute matrice est donc trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a $T = P^{-1}MP$ avec T une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est constituée par les valeurs propres de M.
Lorsque $n = 2$ ou $n = 3$, on cherchera généralement T sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

D – Applications

Il existe de nombreuses applications à la réduction d'endomorphisme :
- calcul de puissances ;
- résolution de suites récurrentes linéaires ;
- résolution de systèmes d'équations différentielles ;
- etc.

Voir les exemples du cours.

Théorème 9.12

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des suites réelles vérifiant une relation de récurrence de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + a_{p-2}u_{n+p-2} + \cdots + a_0 u_n$$

forme un espace vectoriel.

Chapitre 10 – Polynômes

A – Généralités

1 – Degré d'un polynôme

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, on appelle degré de $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_k X^k$ l'entier $\max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$.

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$. Si $\deg(Q) < \deg(P)$ alors $\deg(P+Q) = \deg(P)$.
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

  On a en fait : $P \times Q = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ où $\deg(P) = p$ et $\deg(Q) = q$.
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

2 – Polynômes dérivés

Théorème 10.1 : Formule de Leibniz

Soit P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors, $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$.

Théorème 10.2 : Formule de Taylor

Soit P un polynôme de degré n et $a \in \mathbb{K}$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

B – Racines et factorisation

1 – Généralités

Théorème 10.3 : Division euclidienne

Soit A et B deux polynômes tels que $\deg(B) \leqslant \deg(A)$. Alors,

$$\exists!(Q,R) \in \mathbb{K}[X], \quad A = BQ + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(B).$$

Théorème 10.4 : Théorème de factorisation

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont p racines d'un polynôme P alors :

$$\exists! Q \in \mathbb{K}[X] \quad P = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_p)Q$$

On dit que P de degré n est scindé sur $\mathbb{K}$ (ou dans $\mathbb{K}[X]$) s'il possède n racines dans $\mathbb{K}$. Si c'est le cas,

$$P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 = a_n (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)$$

ce qui nous donne n relations entre les racines et les coefficients.

Définition 10.5

Un polynôme P est dit irréductible si :

$$P = QR \text{ avec } Q, R \in \mathbb{K}[X] \Longrightarrow Q \text{ ou } R \text{ constant.}$$

2 – Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

Théorème 10.6 : d'Alembert-Gauss

Un polynôme complexe non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Ainsi, tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec leur ordre de multiplicité) et peut s'écrire sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i) \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $P(\alpha) = 0$ alors $P(\bar{\alpha}) = 0$. $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2 \in \mathbb{R}[X]$. Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut donc se factoriser sous forme d'un produit de polynômes de degré 1 et polynômes de degré 2 à discriminant négatif.
Dans la pratique, on commencera par le décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ et on fera apparaître les facteurs réels en regroupant les racines conjuguées.

Théorème 10.7 : Polynômes irréductibles

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et de degré 2 à discriminant négatif.

3 – Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Ce sont les n racines simples du polynôme $X^n - 1$ de la forme $\omega_k = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.
Leur somme est nulle :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \frac{1 - \mathrm{e}^{i\frac{2n\pi}{n}}}{1 - \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0.$$

De même, on peut déterminer les racines de $X^n - a$ avec $a \in \mathbb{C}$.
On écrit $a = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ et on trouve $\alpha_k = \rho^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}} \omega_k$.

Chapitre 11 – Espaces préhilbertiens réels

A – Produit scalaire

Définition 11.1

On appelle produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-e.v. E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que :

- φ est une forme bilinéaire :
  $\forall x_1, x_2, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda\varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$.
  $\forall x, y_1, y_2 \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda\varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$.
- φ est symétrique : $\forall x, y \in E,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
- φ est définie positive : $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) \geqslant 0$ et $\varphi(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0_E$.

On dit que (E, φ) est un espace préhilbertien réel. Si $\dim E < +\infty$, on parle d'espace euclidien.

Exemples fondamentaux d'espaces préhilbertiens réels :

— $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel défini par $(x|y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

— $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 PQ$.

— $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $(f|g) = \displaystyle\int_a^b fg$.

— $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $(A|B) = \mathrm{Tr}(B^T A)$.

Théorème 11.2 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. On a alors :

$$\forall x, y \in E \quad |(x|y)| \leqslant ||x|| \cdot ||y||$$

Il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Définition 11.3 : Norme euclidienne

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel.
On appelle norme (euclidienne) sur E l'application $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall x \in E \quad ||x|| = \sqrt{(x|x)}$$

L'application $||\cdot||$ vérifie les propriétés suivantes :

- $||x|| = 0 \iff x = 0_E$.
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.
- Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E,\ ||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Identités remarquables vérifiées par la norme euclidienne : (valables pour x, y quelconques)

- $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2(x|y)$.
- $||x - y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2(x|y)$.
- Identité du parallélogramme : $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$.
- Identité de polarisation : $(x|y) = \dfrac{1}{4}\left(||x + y||^2 - ||x - y||^2\right)$.

B – Orthogonalité

1 – Familles orthonormales

Définition 11.4

Deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux si $(x|y) = 0$.

Théorème 11.5 : Pythagore

$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \Longleftrightarrow (x|y) = 0.$

Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tous les autres.

Définition 11.6 : Familles orthogonales et orthonormales

Soit I un ensemble d'indices fini ou infini.

- Une famille de vecteurs $(e_i)_{i\in I}$ de E est dite orthogonale si :

$$\forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow (e_i|e_j) = 0.$$

- Elle est dite orthonormale si elle vérifie de plus : $\forall i \in I,\ ||e_i|| = 1$.

Cela revient à dire que pour tout $(i, j) \in I^2$, $(e_i|e_j) = \delta_{i,j}$.

Théorème 11.7

- Une famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre.
- Une famille orthonormale est libre.

Théorème 11.8 : Décomposition dans une base orthonormée

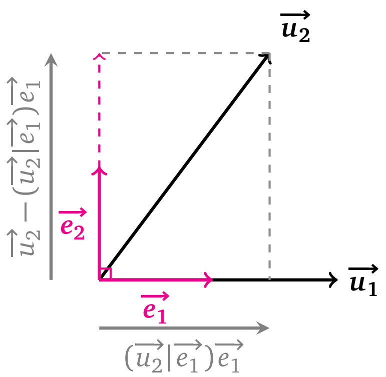
Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

$$\forall x \in E,\ x = (x|e_1)e_1 + \cdots + (x|e_n)e_n = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i$$

Proposition 11.9

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. On considère $x, y \in E$ de coordonnées respectives $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$. On a alors :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)(y|e_i) = X^T Y \quad \text{et} \quad ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 = X^T X$$



Tout espace euclidien admet une base orthonormale, on peut en construire une à l'aide de l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

On part d'une base $(u_1, \ldots, u_n)$ quelconque de E et on construit pas à pas une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ en posant :

$$e'_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} (u_k|e_i)e_i \quad \text{puis} \quad e_k = \frac{e'_k}{||e'_k||}$$

2 – Orthogonal d'une partie

Définition 11.10 : Orthogonal

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle orthogonal de F l'ensemble :

$$F^{\perp} = \{x \in E \mid \forall y \in F \ (x|y) = 0\}$$

Théorème 11.11

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

- $u \in F^{\perp} \Longleftrightarrow u$ est orthogonal aux vecteurs d'une base de F.
- $E = F \oplus F^{\perp}$.
- Si $\dim E = n$ et $\dim F = p$ alors $\dim F^{\perp} = n - p$. $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Corollaire 11.12 : Inégalité de Bessel

Soient $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormale de E et $x \in E$. Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}(x|e_i)^2 \leqslant ||x||^2$.

Il y a égalité si et seulement si $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

3 – Projection orthogonale et distance

Définition 11.13

Soit F un s.e.v. de dimension finie de $(E, (.|.))$. On a $E = F \oplus F^{\perp}$.
On appelle projection orthogonale sur F la projection p sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Théorème 11.14

- $p(x)$ est entièrement caractérisé par : $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^{\perp}$.
- Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F alors $p(x) = (x|e_1)e_1 + \dots + (x|e_p)e_p$.

Définition 11.15

Soit $x \in E$ et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
On appelle distance de x à F le réel $d(x, F) = \inf\limits_{u \in F} ||x - u||$.

Théorème 11.16

En reprenant les hypothèses précédentes, $d(x, F) = \inf\limits_{u \in F} ||x - u|| = ||x - p(x)||$ où p est la projection orthogonale sur F.

Chapitre 12 – Isométries d'un espace euclidien

On considère un espace euclidien – espace préhilbertien de dimension finie – $(E,(\cdot|\cdot))$.

A – Endomorphismes orthogonaux

1 – Matrices orthogonales

Définition 12.1

On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale si et seulement si $M^T M = MM^T = I_n$.
On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Une matrice orthogonale est inversible, d'inverse M^T et de déterminant ± 1. On note $SO_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 (groupe spécial orthogonal). La composée d'isométries (positives) reste une isométrie (positive).

Théorème 12.2 : Caractérisation des matrices orthogonales

Une matrice est orthogonale si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :
- ses vecteurs colonnes forment une famille orthonormale.
- ses vecteurs lignes forment une famille orthonormale.

Une matrice orthogonale s'interprète comme la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée. Lorsque les bases de départ et d'arrivée ont même orientation, son déterminant vaut $+1$.

2 – Isométries vectorielles

Définition 12.3

Soit f un endomorphisme de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :
- f conserve la norme : $\forall x \in E, ||f(x)|| = ||x||$.
- f conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E, (f(x)|f(y)) = (x|y)$.

On dit alors que f est une isométrie vectorielle de E (ou un endomorphisme orthogonal).

Une isométrie vectorielle est bijective, c'est un automorphisme.

Théorème 12.4

Un endomorphisme est orthogonal si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :
- l'image d'une base orthonormale est une base orthonormale.
- sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale.

3 – Symétries orthogonales

Définition 12.5

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a $E = F \oplus F^{\perp}$.
On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$.
Si F est un hyperplan de E, on parle alors de réflexion.

Théorème 12.6 : Caractérisation des symétries orthogonales

Une isométrie vectorielle est une symétrie orthogonale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

4 – Classification des isométries planes

Théorème 12.7 : Isométries du plan

- $M \in O_2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \exists\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \sin\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix}$.
- $M \in SO_2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \exists\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

<u>Classification</u> :

Nature de l'isométrie	déterminant	spectre	s.e. propres	matrice dans une b.o.n. qcq
identité	1	$\{1\}$	$E_1 = \mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- identité	1	$\{-1\}$	$E_{-1} = \mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
rotation d'angle θ $(\neq 0, \pi)$	1	$\varnothing$	/	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(u)$	-1	$\{-1, 1\}$	$E_1 = \mathrm{Vect}(u)$ $E_{-1} = E_1^{\perp}$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

5 – Classification des isométries dans l'espace

<u>Plan d'identification</u> : Soit f l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice A.

- On vérifie que $A^T A = I_3$, *i.e.* $A \in O_3(\mathbb{R})$. f est une isométrie vectorielle.
- On calcule $\det(A)$.
  — Si $\det(A) = 1$, $A \in SO_3(\mathbb{R})$ et f est une rotation d'axe dirigé par u et d'angle θ. (cas 1)
  — Si $\det(A) = -1$, $A \in O_3^-(\mathbb{R})$ et f est la composée d'une rotation d'axe dirigé par u et d'angle θ et d'une réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(u)^{\perp}$. (cas 2)
- On détermine l'axe $\mathrm{Vect}(u)$ de la rotation en résolvant $AX = X$ (cas 1) ou $AX = -X$ (cas 2).
- L'angle de la rotation est donné par :
  $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta)$ (cas 1) ou $\mathrm{Tr}(A) = -1 + 2\cos(\theta)$ (cas 2)
  $\sin(\theta) = [u, x, f(x)]$ avec $||x|| = ||u|| = 1$ et $x \in \mathrm{Vect}(u)^{\perp}$.
  Dans le deuxième cas, si $\theta = 0$, f est une simple réflexion.

<u>Classification</u> :

Nature de l'isométrie	déterminant	spectre	matrice dans une certaine b.o.n.
identité	1	$\{1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
demi-tour	1	$\{1, -1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
rotation d'angle θ $(\neq 0, \pi)$	1	$\{1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Nature de l'isométrie	déterminant	spectre	matrice dans une certaine b.o.n.
- identité	-1	$\{-1\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
réflexion	-1	$\{1,-1\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
composée rotation/réflexion	-1	$\{-1\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

B – Matrices symétriques réelles

Théorème 12.8 : Théorème spectral

Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle est diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale :

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \quad P^{-1}MP = P^TMP \text{ diagonale.}$$

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux, toutes ses valeurs propres sont réelles. Si la matrice représentative d'un endomorphisme dans une certaine base est symétrique réelle, alors il existe une base orthonormale constituée de vecteurs propres de cet endomorphisme.

C – Produit vectoriel

On suppose ici que $E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel.

Théorème 12.9 : Propriétés du produit vectoriel

Soit x, y et z trois vecteurs de E.

- $(x \wedge y|z) = [x, y, z]$.
- Si u et v ne sont pas colinéaires, $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E.
- Si (u, v) est orthonormée, $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de E.
- Identité de Lagrange : $(x|y)^2 + ||x \wedge y||^2 = ||x||^2||y||^2$.
- Double produit vectoriel : $x \wedge (y \wedge z) = (x|z)y - (x|y)z$. (*1 2 3 = 1 3 2 - 1 2 3*)

Chapitre 13 – Probabilités discrètes

A – Dénombrement

Définition 13.1

Soient E un ensemble à n éléments et $p \in [\![0, n]\!]$.

- Un p-uplet ou une p-liste de E est une famille de p éléments de E.
- Un arrangement de p éléments de E est un p-uplet constitué d'éléments de E deux à deux distincts.
- Une permutation de E est un arrangement de E à n éléments.
- Une combinaison de p éléments de E est un sous-ensemble de E contenant p éléments.

On modélise souvent les tirages successifs avec remise à l'aide de listes, les tirages successifs sans remise avec des arrangements et les tirages simultanés avec des combinaisons.

Théorème 13.2

Sous les hypothèses précédentes,

- Il y a n^p p-listes de E distinctes.
- Il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ arrangements distincts de p éléments de E.
- Il y a $n!$ permutations distinctes de E.
- Il y a $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ combinaisons distinctes de p éléments de E.

Proposition 13.3 : Propriétés des coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}$ et un entier $p \in [\![1, n]\!]$.

(i) $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1, \dbinom{n}{1} = n$ (ii) $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$

(iii) $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$ (iv) $\dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p} = \dbinom{n}{p}$

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

B – Probabilités discrètes

1 – Tribus et probabilités

Définition 13.4 : Ensemble dénombrable

Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.
Il sera dit *au plus* dénombrable s'il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

Théorème 13.5

Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont dénombrables. Les ensembles $\mathbb{R}$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ne le sont pas.

Définition 13.6

On appelle univers l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire donnée. On le note en général Ω. Les éléments de l'univers Ω sont appelés des possibles (résultats possibles). On dit qu'un possible est réalisé s'il est observé au cours d'une expérience donnée.

Définition 13.7 : Tribu

Soit Ω un ensemble non vide. On appelle tribu sur Ω toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ qui vérifie :

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$;

(ii) Si $A \in \mathscr{A}$ alors $\overline{A} \in \mathscr{A}$ *(stabilité par passage au complémentaire)* ;

(iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ alors $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$ *(stabilité par réunion dénombrable)*.

La donnée d'un univers Ω et d'une tribu $\mathscr{A}$ définit un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$; tout élément de $\mathscr{A}$ est appelé événement de Ω.

Définition 13.8 : Système complet d'événements

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle système complet d'événements toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements, avec $I = [\![1, n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ou $I = \mathbb{N}$, telle que :

(i) Pour tout couple (i, j) d'éléments distincts, $A_i \cap A_j = \varnothing$;

(ii) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.

Définition 13.9 : Réunion et intersection dénombrables

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble Ω. On définit les ensembles $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ par :

$$\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad \omega \in A_n \quad \text{et} \quad \omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad \omega \in A_n$$

Définition 13.10 : Probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $P : \mathscr{A} \to [0, 1]$ vérifiant :

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \qquad \text{(propriété de } \sigma\text{-additivité)}$$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est alors appelé espace probabilisé.

Théorème 13.11

Soit $\Omega = \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un univers dénombrable et une famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels.
Alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\{\omega_n\}) = p_n$ ssi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n \geqslant 0; \quad \text{la série } \sum p_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} p_i = 1$$

Quand elle existe, P est unique et pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $P(A) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \omega_n \in A}} p_n$.

Proposition 13.12

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathscr{A}$.

- $P(\varnothing) = 0$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$. *(croissance de la probabilité)*
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Proposition 13.13 : Continuité croissante

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements (au sens de l'inclusion) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

Proposition 13.14 : Continuité décroissante

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements (au sens de l'inclusion) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, alors :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

Proposition 13.15 : Sous-additivité finie

Si $(A_1, \dots, A_n)$ est une famille d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, alors :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$$

Proposition 13.16 : Sous-additivité dénombrable

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et si la série $\sum P(A_n)$ converge, alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

2 – Conditionnement et indépendance

Théorème / Définition 13.17 : Probabilité conditionnelle

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et un A événement tel que $P(A) \neq 0$. L'application

$$P_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ B & \longmapsto & \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{array} \right.$$

est une probabilité sur Ω. On l'appelle probabilité conditionnelle relative à A (ou sachant A).
Pour tout événement B, $P_A(B)$ – notée encore $P(B|A)$ – est appelée probabilité de B sachant A.

Théorème 13.18 : Formule des probabilités composées

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ une famille d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors,

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Théorème 13.19 : Formule des probabilités totales

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements.
Pour tout événement B, la série de terme général $P(B \cap A_n)$ est convergente et :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n) P(A_n)$$

Théorème 13.20 : Formule de Bayes

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, A et B deux événements, $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \times P(B|A)$.

Définition 13.21 : Indépendance de deux événements

Deux événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Définition 13.22 : Famille d'événements deux à deux indépendants

On dit des événements $A_1, \dots, A_n$ qu'ils sont deux à deux indépendants si :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ i \neq j \Longrightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i) P(A_j)$$

Définition 13.23 : Famille finie d'événements mutuellement indépendants

On dit des événements $A_1, \dots, A_n$ qu'ils sont mutuellement indépendants si :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

L'indépendance mutuelle d'une famille d'événements implique qu'ils sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse.

Chapitre 14 – Variables aléatoires discrètes

A – Variables aléatoires discrètes

Définition 14.1 : Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire réelle discrète toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :

- $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable ;
- Si $x \in X(\Omega)$ alors $(X = x) \in \mathscr{A}$.

$(X \in A)$ est alors événement pour tout $A \subset X(\Omega)$.

Théorème 14.2

Soient $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable et X une variable aléatoire discrète sur cet espace.
Avec les notations précédentes, la famille $((X = x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Définition 14.3 : Loi d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On appelle loi de probabilité de X (ou plus simplement loi de X) et on note P_X l'application :

$$\left| \begin{array}{rl} P_X : X(\Omega) \subset \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \longmapsto P(X = x) \end{array} \right.$$

Définition 14.4 : Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On appelle fonction de répartition de X et on note F_X l'application :

$$\left| \begin{array}{rl} F_X : \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto P(X \leqslant x) \end{array} \right.$$

F_X est constante par morceaux, croissante et $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

B – Moments d'une variable aléatoire

Définition 14.5 : Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On pose $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
X est dite d'espérance finie si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot P(X = x_n)$ converge absolument.
Dans ce cas, on appelle espérance de X et on note $E(X)$ le réel :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \cdot P(X = x_n)$$

L'espérance est linéaire.

Théorème 14.6 : Théorème de transfert

Soient X une variable aléatoire à valeurs finies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$. On note $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Alors, $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) \cdot P(X = x_n)$ converge et, dans ce cas,

$$E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n)$$

Théorème / Définition 14.7 : Variance

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant un moment d'ordre 2. Alors $(X - E(X))^2$ est d'espérance finie. On appelle variance de X et on note $V(X)$ le réel positif :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x)$$

On appelle écart type de X et on note $\sigma(X)$ le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition 14.8 : Formule de Kœnig-Huygens

Si la variable aléatoire discrète X admet un moment d'ordre 2,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

C – Vecteurs aléatoires discrets

Définition 14.9 : Couple de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle couple de variables aléatoires discrètes toute application

$$Z : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$

où X et Y sont des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A})$. On note $Z = (X, Y)$ ce couple de variables.

Z est une variable aléatoire discrète sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 14.10 : Loi conjointe

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On appelle loi conjointe de X et de Y (ou loi de probabilité du couple (X, Y)) l'application :

$$P_{(X,Y)} : \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \longrightarrow & [0, 1] \\ (x, y) & \longmapsto & P\left((X = x) \cap (Y = y)\right) \end{array} \right.$$

Définition 14.11 : Lois marginales

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On appelle $1^{\text{ère}}$ loi marginale de (X, Y) la loi de X et $2^{\text{ème}}$ loi marginale de (X, Y) la loi de Y.

Définition 14.12 : Lois conditionnelles

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

(i) On appelle loi conditionnelle de X sachant $(Y=y)$ l'application $x \mapsto P(X=x|Y=y)$;

(ii) On appelle loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$ l'application : $y \mapsto P(Y=y|X=x)$.

Définition 14.13 : Indépendance de deux variables aléatoires

Deux variables aléatoires réelles X et Y sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont dites indépendantes si :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad P\left((X=x) \cap (Y=y)\right) = P\left(X=x\right) \times P\left(Y=y\right)$$

Dans le cas d'indépendance, on peut retrouver la loi conjointe à partir des lois marginales.

Théorème / Définition 14.14

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors la variable aléatoire $(X-E(X))(Y-E(Y))$ admet une espérance. On appelle alors covariance de X et Y le réel noté $\text{cov}(X,Y)$ défini par :

$$\text{cov}(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y))$$

Théorème 14.15 : Formule de Kœnig-Huygens

Sous les hypothèses précédentes, $\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$.

On a $\text{cov}(X,X) = V(X)$ et $E(XY) = \displaystyle\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} x_i y_j P\left((X=x_i) \cap (Y=y_j)\right)$.

Proposition 14.16

Si X et Y sont deux variables alatoires admettant un moment d'ordre 2 et $a, b \in \mathbb{R}$, alors :

$$V(aX+bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab\,\text{cov}(X,Y)$$

Pour $a=b=1$, $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X,Y)$.

Théorème 14.17

Si X et Y sont deux variables alatoires admettant un moment d'ordre 2 et indépendantes, alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y); \quad \text{cov}(X,Y) = 0; \quad V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Définition 14.18

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et admettant un moment d'ordre 2. On suppose de plus que leur écart type est non nul.
On appelle coefficient de corrélation linéaire de X et Y le réel $\rho(X,Y) = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$.

$\rho(X,Y) \in [-1,1]$ et $\rho(X,Y) = \pm 1$ si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $Y = aX + b$.

D – Fonctions génératrices

Définition 14.19 : Fonction génératrice

La fonction génératrice de la variable X est définie par :

$$G_X : t \mapsto E\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$$

Proposition 14.20

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X=n)t^n$ est supérieur ou égal à 1.

Théorème 14.21 : Fonction génératrice de la somme de deux variables indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Notons G_X et G_Y leurs fonctions génératrices de rayon de convergence respectifs R_X et R_Y.
Si X et Y sont indépendantes, la fonction génératrice G_{X+Y} de $X+Y$ est définie sur au moins $]-R, R[$ avec $R \geqslant \min(R_X, R_Y)$ et :

$$\forall t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y \quad G_{X+Y}(t) = E\left(t^{X+Y}\right) = E\left(t^X\right)E\left(t^Y\right) = G_X(t)G_Y(t)$$

Théorème 14.22 : Fonction génératrice et moments

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(i) La variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1.
Si tel est le cas, $E(X) = G_X'(1)$.

(ii) La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.

E – Convergence et approximations

Lemme 14.23 : Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs positives et admettant une espérance.

$$\forall a > 0 \quad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Proposition 14.24 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant un moment d'ordre 2.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Théorème 14.25 : Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose toutes les variables indépendantes et de même loi, admettant une espérance m et un écart type σ. Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors,

$$\forall \varepsilon \geqslant 0, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

F – Lois usuelles

Nom	**Notation**	$\boldsymbol{X(\Omega)}$	$\boldsymbol{P(X=k)}$	$\mathrm{E}(X)$	$\mathrm{V}(X)$	$\boldsymbol{G(t)}$
Bernoulli	$\mathscr{B}(p)$	$\{0;1\}$	$\begin{cases} p \text{ si } k=1 \\ 1-p \text{ si } k=0 \end{cases}$	p	pq	$1-p+pt$
Binomiale	$\mathscr{B}(n,p)$	$[\![0;n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$	np	npq	$(1-p+pt)^n$
Uniforme	$\mathscr{U}([\![1;n]\!])$	$[\![1;n]\!]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{t-t^{n+1}}{n(1-t)}$
Géométrique	$\mathscr{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$q^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pt}{1-qt}$
Poisson	$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois binomiales de paramètres respectifs $(m_1, p), \ldots, (m_n, p)$ alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètre $(m_1 + \cdots + m_n, p)$.

La somme de n variables indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Théorème 14.26 : Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Chapitre 15 – Norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$

Définition 15.1 : Norme euclidienne

Soit $x = (x_1, \dots, x_m)$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$. On appelle norme euclidienne de x le réel positif ou nul :

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_i^2}$$

Voici quelques propriétés classiques vérifiées par la norme euclidienne :

Proposition 15.2

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^m$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $||x|| \geqslant 0$ et $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^m}$.
- $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.
- Inégalité triangulaire :
$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leqslant ||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$$

$\mathscr{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - a|| < r\}$ est appelée boule ouverte de centre a et de rayon r.
$\mathscr{B}_f(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - a|| \leqslant r\}$ est appelée boule fermée de centre a et de rayon r.

Définition 15.3 : Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^m$

- Une partie A de $\mathbb{R}^m$ est dite ouverte si : $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x, r) \subset A$.
- Une partie A de $\mathbb{R}^m$ est dite fermée si son complémentaire, c'est-à-dire $\mathbb{R}^m \setminus A$, est ouvert.

Une boule ouverte est un ouvert et une boule fermée est un fermé. Une partie peut être à la fois ouverte et fermée, et, de même, ni ouverte ni fermée.

Ex. : $\varnothing$ et $\mathbb{R}^m$ sont à la fois ouverts et fermés. $[0, 1[$ n'est ni un fermé ni un ouvert de $\mathbb{R}$.

Lorsqu'une partie est décrite à l'aide d'inéquations, on regarde si les inégalités sont strictes ou larges.

Définition 15.4 : Partie bornée

Une partie A de $\mathbb{R}^m$ est bornée si elle est contenue dans une boule de rayon M.
Autrement dit, A est bornée si : $\exists M \geqslant 0,\ \forall x \in A,\ ||x|| \leqslant M$.

Définition 15.5 : Point intérieur, point adhérent, point extérieur

Soit A une partie de $\mathbb{R}^m$ et $x \in \mathbb{R}^m$.

– On dit que x est un point intérieur de A s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathscr{B}(x, r) \subset A$.
– On dit que x est un point extérieur de A s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathscr{B}(x, r) \cap A = \varnothing$.
– On dit que x est un point adhérent à A si pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{B}(x, r) \cap A \neq \varnothing$.

La frontière de A est l'ensemble des points x tels que toute boule ouverte centrée en x rencontre à la fois A et son complémentaire.

Chapitre 16 – Fonctions de plusieurs variables

A – Généralités

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. On notera indistinctement $||\cdot||$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.

On a $f : x = (x_1, \dots, x_p) \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Les applications $f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ sont généralement appelées applications *composantes* et $x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ applications *partielles*.

Définition 16.1

- On dit que f est bornée sur une partie $A \subset \mathbb{R}^p$ si : $\exists M \geqslant 0,\ \forall x \in A,\ ||f(x)|| \leqslant M$.
- On dit que f admet une limite $l \in \mathbb{R}^n$ en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^p,\ ||x - x_0|| < \eta \Longrightarrow ||f(x) - l|| < \varepsilon.$$

- On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *i.e.* :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^p,\ ||x - x_0|| < \eta \Longrightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon.$$

La somme, le produit et la composée de fonctions continues est une fonction continue.

Théorème 16.2

- f est continue en x si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est continue en x.
- Si f est continue, les applications partielles sont continues. La réciproque est fausse.
- L'image d'un fermé borné (de $\mathbb{R}^p$) par une fonction continue est un fermé borné (de $\mathbb{R}^n$).

Définition 16.3

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^p$ si les dérivées partielles de f à l'ordre k existent et sont continues sur $\mathscr{U}$.

Avec les notations usuelles, on a : $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_p}\,\mathrm{d}x_p$.

B – Fonctions de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$

Théorème 16.4 : Formule de Taylor-Young à l'ordre 1

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ alors pour $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot k + \mathrm{o}(||(h,k)||)$$

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$, le plan tangent à la surface au point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) avec $z_0 = f(x_0, y_0)$ a pour équation :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$$

Théorème 16.5 : Condition nécessaire d'existence

Si $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et si (x_0, y_0) est un extremum local de $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ alors (x_0, y_0) est un point critique de f, c'est-à-dire $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = \overrightarrow{0}$.

Théorème 16.6 : Théorème de Schwarz

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur $\mathscr{U}$.

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$, la hessienne de f au point (x_0, y_0) est la matrice :

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Théorème 16.7 : Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$. Au voisinage de (x_0, y_0),

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\right) + \mathrm{o}(h^2 + k^2) \end{aligned}$$

Théorème 16.8 : Extrema locaux

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$ un point *critique* de f.

- si $\det(H) > 0$ alors f admet en (x_0, y_0) un extremum.
- si $\det(H) < 0$ alors (x_0, y_0) correspond à un point selle.
- si $\det(H) = 0$ alors on ne peut pas conclure.

La trace de H permet de distinguer un minimum d'un maximum.

Théorème 16.9 : Dérivées partielles et composées

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que l'on suppose toutes de classe $\mathscr{C}^1$.

- Si $F : t \mapsto f(x(t), y(t))$ alors F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

- Si $G : (x, y) \mapsto f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ alors G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x, y), \psi(x, y))\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x, y), \psi(x, y))\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x, y), \psi(x, y))\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x, y), \psi(x, y))\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y)$$

Chapitre 17 – Géométrie élémentaire

A – Droites et plans

1 – Droites du plan

Paramétrage d'une droite passant par A dirigée par $\vec{u} = (\alpha, \beta)$: $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Équation cartésienne : $ax + by + c = 0$ où $\vec{n} = (a, b)$ est normal à la droite.

Distance de $M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ à $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$: $d(M, \mathscr{D}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

2 – Droites de l'espace

Paramétrage d'une droite passant par A dirigée par $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$: $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Équations cartésiennes : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ où $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ dirige la droite.

Si $\mathscr{D}$ est la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$, $d(M, \mathscr{D}) = \dfrac{||\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}||}{||\vec{u}||}$.

Deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ dans l'espace sont non coplanaires, parallèles, sécantes ou confondues.

Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ passent respectivement par A et B et sont dirigées par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $d(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2) = \dfrac{|\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})|}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}$.

Angle entre deux droites dirigées respectivement par $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\theta$.

3 – Plans

Paramétrage d'un plan passant par A et dirigé par $\vec{u} = (a, b, c)$ et $\vec{v} = (a', b', c')$:

$$\begin{cases} x = x_A + at + a'u \\ y = y_A + bt + b'u \\ z = z_A + ct + c'u \end{cases} \quad (t, u \in \mathbb{R})$$

Équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$ où $\vec{n} = (a, b, c)$ est normal au plan.

Deux plans sont parallèles, confondus ou sécants en une droite.

Distance de $M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ à $\mathscr{P}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$: $d(M, \mathscr{P}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

B – Cercles et sphères

1 – Cercles dans le plan

Équation cartésienne d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.
La tangente à un cercle de centre Ω en un point A est perpendiculaire à la droite (ΩA).
Paramétrage : $\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases}$

2 – Sphères

Équation cartésienne d'une sphère $\mathscr{S}$ de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Le plan tangent à une sphère $\mathscr{S}$ de centre $\Omega(a, b, c)$ en un point A est perpendiculaire à la droite (ΩA).
Paramétrage : $\begin{cases} x = a + R\cos\theta\cos\varphi \\ y = b + R\cos\theta\sin\varphi \\ z = c + R\sin\theta \end{cases}$

Chapitre 18 – Courbes du plan

On suppose que le plan est muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé direct.

A – Construction d'une courbe paramétrée

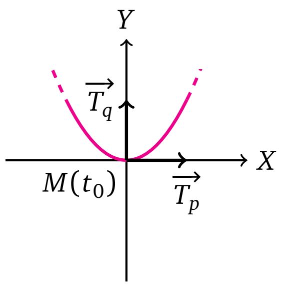
On considère la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

- Domaine de définition $\mathscr{D}$
- Recherche des symétries
- Étude des variations
- Points stationnaires : points où $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ s'annule.

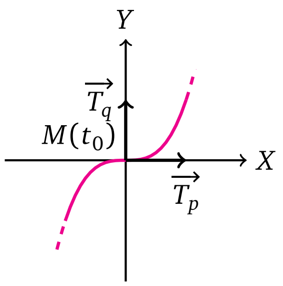
  Lorsque le point $M(t_0)$ est régulier, sa tangente est dirigée par le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$.
  Dans le cas contraire, on effectue un développement limité des deux fonctions coordonnées x et y au voisinage de t_0 :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t\to t_0}{=} \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + (t-t_0)^p \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \cdots + (t-t_0)^q \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{o}((t-t_0)^q) \\ \mathrm{o}((t-t_0)^q) \end{pmatrix}$$

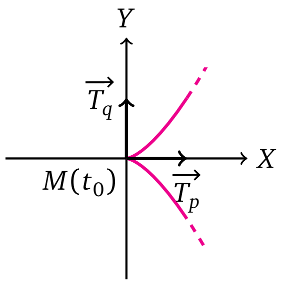
  $\vec{T}_p \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est le premier vecteur non nul du DL et $\vec{T}_q \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ le premier vecteur non colinéaire à $\vec{T}_p$.
  $\vec{T}_p$ dirige la tangente au point $M(t_0)$. Il y a alors quatre configurations possibles.



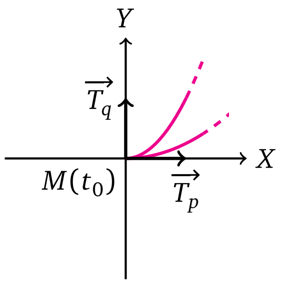
Point ordinaire (p impair, q pair)



Point d'inflexion (p impair, q impair)



Point de rebroussement de première espèce
(p pair, q impair)



Point de rebroussement de seconde espèce
(p pair, q pair)

- Branches infinies
  Il y a une branche infinie si l'une des coordonnées tend vers l'infini lorsque t tend vers t_0.
  Si une seule des coordonnées tend vers l'infini et l'autre admet une limite finie, il y a une asymptote horizontale ou verticale.
  Si les deux coordonnées tendent vers l'infini, on étudie la limite du rapport $\dfrac{y(t)}{x(t)}$.
  - Si la limite est 0, on dit que l'on a une branche parabolique horizontale.
  - Si la limite est infinie, on dit que l'on a une branche parabolique verticale.
  - Si on trouve une limite a non nulle, on étudie alors la limite de $y(t) - ax(t)$:
    (a) si cette quantité tend vers $\pm\infty$, on dit que l'on a une branche parabolique de direction $y = ax$.
    (b) si on trouve une limite b alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe.

B – Propriétés métriques des courbes

On considère une application $f : t \mapsto (x(t), y(t))$ de classe $\mathscr{C}^k$ (avec $k \geqslant 2$) sur I, supposée régulière.

Définition 18.1 : Longueur d'une courbe

Soient $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$. La longueur de la courbe paramétrée définie par f est le réel positif :

$$L = \int_a^b \left\|f'(t)\right\| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right\| = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Définition 18.2 : Abscisse curviligne

On appelle abscisse curviligne de f d'origine $t_0 \in I$ la fonction $s : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in I \quad s(t) = \int_{t_0}^t \left\|f'(t)\right\| \,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^t \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right\| = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\,\mathrm{d}u$$

Définition 18.3 : Repère de Frenet

On appelle repère de Frenet au point $M(t)$ le repère orthonormé direct $(M(t), \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$.

Théorème / Définition 18.4 : Courbure

En tout point, les vecteurs $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}$ et $\overrightarrow{N}$ sont colinéaires.

On appelle alors courbure de f la fonction γ définie par : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma \cdot \overrightarrow{N}$.

Théorème 18.5

Il existe une application α de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telle que :

$$\forall t \in I \quad \overrightarrow{T}(t) = \cos\alpha(t) \cdot \vec{\imath} + \sin\alpha(t) \cdot \vec{\jmath}$$

Proposition 18.6 : Courbure et formules de Frenet

– La courbure γ est donnée par la formule $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$

– Les formules de Frenet :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\cdot\overrightarrow{N} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\cdot\overrightarrow{T}$$

Le point de paramètre t est dit birégulier si $\gamma(t) \neq 0$.

Définition 18.7 : Rayon de courbure, centre de courbure

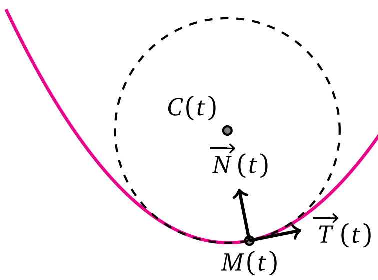
On suppose que le point M de paramètre t est birégulier.

– On appelle rayon de courbure en M de paramètre t le réel $R(t) = \dfrac{1}{\gamma(t)}$.

– On appelle centre de courbure en M de paramètre t le point $C(t)$ défini par la relation :

$$C(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t)$$

– On appelle cercle de courbure en M de paramètre t le cercle de centre $C(t)$ et de rayon $|R(t)|$.



C – Enveloppe d'une famille de droites et développée

On considère une famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ définies chacune par la donnée d'un point $A(t)$ et d'un vecteur directeur $\vec{u}(t)$. On suppose que les applications A et $\vec{u}$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

Définition 18.8 : Enveloppe

On appelle enveloppe de $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ toute courbe Γ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que les droites de la famille $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ soient exactement les tangentes de Γ, c'est-à-dire :

- Quel que soit $t \in I$, $\mathcal{D}_t$ est tangente à Γ.
- La courbe Γ admet en chaque point une tangente et celle-ci est une des droites de la famille $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$.

Définition 18.9 : Développée

La développée d'une courbe régulière est l'ensemble de ses centres de courbure.

Théorème 18.10 : Caractérisation

La développée d'une courbe régulière est l'enveloppe des normales à la courbe.

Chapitre 19 – Surfaces

A – Modes de représentation et plan tangent

1 – Nappes paramétrées

Définition 19.1 : Nappe paramétrée

Soit $f : (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$.

On appelle nappe paramétrée par f l'ensemble $\mathscr{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (u,v) \in \mathscr{U} \right\}$.

Définition 19.2

Un point $M(u,v)$ de $\mathscr{S}$ est dit régulier si la famille $\left(\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u,v) \right)$ est libre.

Sinon, on dit qu'il est stationnaire.

Théorème 19.3 : Plan tangent

Soit $M(u,v)$ est un point régulier de $\mathscr{S}$.

Le plan tangent à $\mathscr{S}$ en $M(u,v)$ est alors dirigé par $\left(\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u,v) \right)$.

$\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u,v)$ est normal au plan tangent.

2 – Surfaces définies par une équation cartésienne

Il s'agit de surfaces définies par des équations du type $f(x,y,z) = 0$ où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est supposée de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On notera $\mathscr{S}$ la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$.

Définition 19.4

On dit que (x_0, y_0, z_0) est un point critique de f si $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_0, y_0, z_0) = \overrightarrow{0}$.

Théorème 19.5 : Plan tangent

Si $M(x_0, y_0, z_0)$ n'est pas un point critique de f, le plan tangent à $\mathscr{S}$ admet $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_0, y_0, z_0)$ comme vecteur normal. Son équation est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

Théorème 19.6

Soit $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ deux surfaces et $\mathscr{C} = \mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$. On considère un point $M \in \mathscr{C}$ et on suppose que les plans tangents $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ à $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ en M ne sont pas confondus. Alors la tangente en M à $\mathscr{C}$ est $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$.

B – Exemples de surface

1 – Surfaces de révolution

Définition 19.7

On appelle surface de révolution la surface $\mathscr{S}$ obtenue par rotation d'une courbe Γ autour d'une droite Δ.

- Δ est appelée axe de $\mathscr{S}$.
- On appelle parallèles de $\mathscr{S}$ les cercles d'axe Δ et rencontrant Γ.
- On appelle méridienne l'intersection de $\mathscr{S}$ avec un plan passant par Δ.

Soit Δ la droite passant par $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et Γ la courbe paramétrée par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$.
Soit $\mathscr{S}$ la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ (demi-méridienne) autour de Δ.

$$M \in \mathscr{S} \iff \text{Il existe } M_0 \in \Gamma \text{ tq } \begin{cases} M \text{ appartient au plan perpendiculaire à } \Delta \text{ passant par } M_0 \\ M \text{ appartient à une sphère centrée en } A \text{ et passant par } M_0 \end{cases}$$

2 – Surfaces réglées

Définition 19.8 : Surfaces réglées

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ indexée par I.

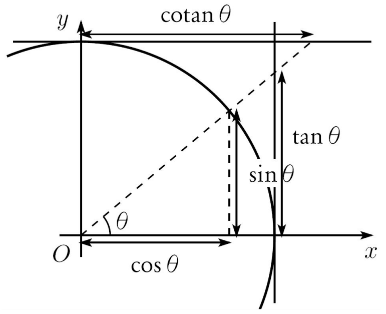
- On appelle surface réglée engendrée par la famille $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ la réunion des droites $\mathcal{D}_t$.
- Les droites $\mathscr{D}_t$ sont appelées génératrices de la surface.

Un point M appartient donc à cette surface s'il existe $t \in I$ tel que $M \in \mathcal{D}_t$.

Le plan tangent en un point régulier contient la génératrice passant par ce point.

Trigonométrie

Définition



$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ et } \operatorname{cotan}\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Angles opposés

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \cos(-\theta) = -\cos(\pi-\theta) \\
&= -\cos(\pi+\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\
\sin(\theta) &= -\sin(-\theta) = \sin(\pi-\theta) \\
&= -\sin(\pi+\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\
\tan(\theta) &= -\tan(-\theta) = -\tan(\pi-\theta) \\
&= \tan(\pi+\theta) = \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)
\end{aligned}$$

Valeurs remarquables

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\tan\theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	n.d.

Passage polaire/cartésien

$z = x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

si $x > 0$, $\quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

si $x < 0$, $\quad \theta = \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Complexes

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$$

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

$$\cos nx + \mathrm{i}\sin nx = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n$$

Angle double

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \qquad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\sin 2x = 2\ \cos x\ \sin x \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

Addition des angles

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\ \cos b - \sin a\ \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a\ \cos b + \cos a\ \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a\ \cos b + \sin a\ \sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a\ \cos b - \cos a\ \sin b \\
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\ \tan b} \\
\tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\ \tan b}
\end{aligned}$$

Addition des fonctions

$$\begin{aligned}
\cos a + \cos b &= \ \ 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\cos a - \cos b &= -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\sin a + \sin b &= \ \ 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\sin a - \sin b &= \ \ 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$a\cos x + b\sin x = \rho\cos(x-\varphi)$$

$$\text{avec} \quad \rho = \sqrt{a^2+b^2},\ \varphi = \arg(a+\mathrm{i}b)$$

Produit des fonctions

$$\begin{aligned}
\cos a\ \cos b &= \frac{1}{2}\big[\cos(a-b)+\cos(a+b)\big] \\
\sin a\ \sin b &= \frac{1}{2}\big[\cos(a-b)-\cos(a+b)\big] \\
\sin a\ \cos b &= \frac{1}{2}\big[\sin(a-b)+\sin(a+b)\big]
\end{aligned}$$

Dérivées et primitives

Fonction		Domaine	Dérivée
$f+g$			$f'+g'$
fg			$f'g+g'f$
$\dfrac{f}{g}$			$\dfrac{gf'-g'f}{g^2}$
f^n			$nf^{n-1}f'$
$\sin(f)$			$f'\cos f$
$\cos(f)$			$-f'\sin f$
e^f			$f'e^f$
$\ln\lvert f\rvert$			$\dfrac{f'}{f}$
$g\circ f$			$(g\circ f)'(x)=f'(x)g'(f(x))$
x^n, x^α	$n\in\mathbb{N}, \alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$	$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*$	$nx^{n-1}, \alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$\alpha\in\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\ln a\, e^{x\ln a}$
$\sqrt{x}$		$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\dfrac{1}{x}$		$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$
e^{mx}	$m\in\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$	me^{mx}
$\ln\lvert x\rvert$		$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$
$\cos x,\ \sin x$		$\mathbb{R}$	$-\sin x,\ \cos x$
$\tan x$		$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$	$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\arccos x$		$]-1,1[$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin x$		$]-1,1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$		$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{ch}\ x,\ \mathrm{sh}\ x,\ \mathrm{th}\ x$		$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}x,\ \mathrm{ch}x, 1-\mathrm{th}^2x$
$\mathrm{argch}\ x$		$]1,+\infty[$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{argsh}\ x$		$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{argth}\ x$		$]-1,1[$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

Fonction		Intervalles	Primitive
x^n, x^α	$n\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$	$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n+1}\ x^{n+1}, \frac{1}{\alpha+1}\ x^{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x-a}$	$a\in\mathbb{R}$	$]-\infty,a[,\quad]a,+\infty[$	$\ln\lvert x-a\rvert$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$a\in\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$
$\dfrac{1}{(x-a)^n}$	$n\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\quad a\in\mathbb{R}$	$]-\infty,a[,\quad]a,+\infty[$	$\dfrac{1}{-n+1}\ \dfrac{1}{(x-a)^{n-1}}$
$\tan x$		$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[\ (k\in\mathbb{Z})$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$		$]k\pi,(k+1)\pi[\ (k\in\mathbb{Z})$	$-\mathrm{cotan}\ x$
$\ln x$		$\mathbb{R}_+^*$	$x\ln x-x$

Développements limités

Formule de Taylor à l'ordre n

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, avec f de classe au moins $\mathscr{C}^n$ sur I. Soit a et x deux points de I. Il existe alors une fonction ε, $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, telle que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n) \end{aligned}$$

Les développements limités suivants sont tous *au voisinage de 0* :

$$\begin{array}{lrll}
DL_n & \mathrm{e}^x & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n) & = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) \\
DL_{2n} & \cos x & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n}) & = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n}) \\
DL_{2n+1} & \sin x & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) & = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \\
DL_6 & \tan x & = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15} x^5 + \mathrm{o}(x^6) & \\
DL_{2n+1} & \arctan x & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) & = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \\
DL_{2n} & \mathrm{ch} x & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n}) & = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n}) \\
DL_{2n+1} & \mathrm{sh} x & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) & = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \\
DL_n & \dfrac{1}{1-x} & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n) & = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n) \\
DL_n & \dfrac{1}{1+x} & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n) & = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n) \\
DL_n & \ln(1+x) & = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n) & = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) \\
DL_n & (1+x)^\alpha & = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \mathrm{o}(x^n) & \\
 & & = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \mathrm{o}(x^n) & \\
DL_2 & \sqrt{1+x} & = 1 + \dfrac{1}{2} x - \dfrac{1}{8} x^2 + \mathrm{o}(x^2) &
\end{array}$$

Limites classiques

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \frac{\tan x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^\alpha \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\mathrm{e}^{-x} x^\alpha \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0 \qquad \frac{\ln x}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$$

Développements en série entière usuels

Rayon	Domaine	Développement
$R = +\infty$	$\mathbb{R}$	$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$
$R = +\infty$	$\mathbb{R}$	$\text{ch}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$R = +\infty$	$\mathbb{R}$	$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$R = +\infty$	$\mathbb{R}$	$\text{sh}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$R = +\infty$	$\mathbb{R}$	$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$R = 1$	$]-1,1[$	$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$
$R = 1$	$]-1,1[$	$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
$R = 1$	$]-1,1]$	$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$
$R = +\infty$	$\mathbb{C}$	$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Géométrie

Géométrie dans le plan

Distance du point $M(x_0, y_0)$ à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$: $d(M, \mathscr{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Géométrie dans l'espace

Distance du point M à la droite $\mathscr{D}$passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$:

$$d(M, \mathscr{D}) = \frac{||\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}||}{||\overrightarrow{u}||}$$

Distance du point $M(x_0, y_0, z_0)$ au plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$:

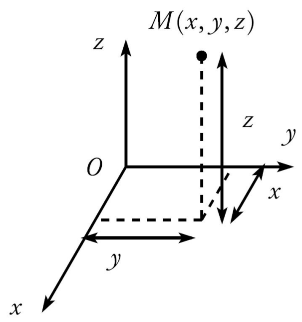
$$d(M, \mathscr{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distance entre les deux droites non coplanaires $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ passant respectivement par A et B et dirigées respectivement par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$$d(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2) = \frac{\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\right|}{||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}||}$$

Systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes



Le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est orthonormé et direct. La position d'un point M est donnée par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z), et alors

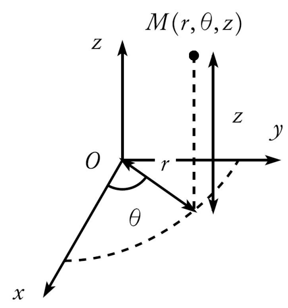
$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} + z\,\overrightarrow{k}$$

Déplacement élémentaire :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{\imath} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{\jmath} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{k}$$

Volume élémentaire : $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Coordonnées cylindriques



La position d'un point M est donnée par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z), avec

$$r \in [\,0, +\infty\,[, \quad \theta \in [\,0, 2\pi\,[\quad z \in \mathbb{R}.$$

On associe au point M le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{k})$:

$$\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{\imath} + \sin\theta\,\overrightarrow{\jmath} \quad \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{\imath} + \cos\theta\,\overrightarrow{\jmath}$$

On a alors $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{k}$.

Passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z$$

Déplacement élémentaire :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{k}$$

Volume élémentaire : $\mathrm{d}\tau = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$
Les coordonnées cylindriques sont à utiliser quand une direction est privilégiée dans le problème (ce sera la direction (Oz)).

Coordonnées polaires C'est un cas particulier des coordonnées cylindriques ($z = 0$)
On associe au point M le repère orthonormé direct plan $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$:

$$\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{\imath} + \sin\theta\,\overrightarrow{\jmath} \quad \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{\imath} + \cos\theta\,\overrightarrow{\jmath}$$

On a alors $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$.

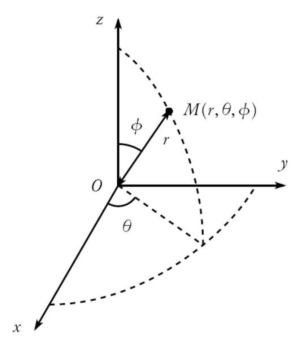
$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

Déplacement élémentaire :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}$$

Surface élémentaire : $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

Coordonnées sphériques



La position d'un point M est donnée par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), avec $r \in [\,0, +\infty\,[$, $\theta \in [\,0, 2\pi\,[$ et $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes

$$x = r\cos\theta\sin\phi \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad z = r\cos\phi$$

Déplacement élémentaire :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\sin\phi\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\mathrm{d}\phi\overrightarrow{u_\phi}$$

Volume élémentaire : $\mathrm{d}\tau = r^2\sin\phi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$.

Probabilités

Lois usuelles discrètes

Nom	Notation	$X(\Omega)$	$P(X=k)$	$\mathrm{E}(X)$	$\mathrm{V}(X)$	$G(t)$
Bernoulli	$\mathscr{B}(p)$	$\{0;1\}$	$\begin{cases} p \text{ si } k=1 \\ 1-p \text{ si } k=0 \end{cases}$	p	$p(1-p)$	$1-p+pt$
Binomiale	$\mathscr{B}(n,p)$	$[\![0;n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pt)^n$
Uniforme	$\mathscr{U}([\![1;n]\!])$	$[\![1;n]\!]$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{t-t^{n+1}}{n(1-t)}$
Géométrique	$\mathscr{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1}p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$\dfrac{pt}{1-(1-p)t}$
Poisson	$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$

Divers

Coefficients binomiaux

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}; \quad p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$
$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}; \quad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}; \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

On résout l'équation caractéritique $X^2 - aX - b = 0$ de discriminant associé Δ.

- Si $\Delta > 0$, deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 : $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
- Si $\Delta = 0$, une racine double r : $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + n\mu) r^n$.
- Si $\Delta < 0$, deux racines complexes conjug. $\rho \mathrm{e}^{\pm i\theta}$: $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \rho^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$

Alphabet grec

α	A	alpha	ν	N	nu
β	B	bêta	ξ	Ξ	xi *ou* ksi
γ	Γ	gamma	o	O	omicron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ϵ	E	epsilon	ρ	P	rhô
ζ	Z	zêta	σ	Σ	Sigma
η	H	êta	τ	T	Tau
θ	Θ	thêta	υ	Υ	upsilon
ι	I	iota	ϕ, φ	Φ	phi
κ	K	kappa	χ	X	chi
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	M	mu	ω	Ω	oméga

Table des matières