# Séries entières

Travaux dirigés #05

## Partie A – Rayon de convergence

**Exercice 1 —** Déterminer le rayon de convergence des séries entières de terme général $a_n x^n$ avec :

$$a_n = 1 \qquad a_n = n \qquad a_n = \frac{1}{n} \qquad a_n = \frac{1}{n^2} \qquad a_n = \sin n$$

$$a_n = n! \quad a_n = \frac{1}{n!} \quad a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} \quad a_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n} \quad a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

**Exercice 2 —** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sin(n)z^n \ ; \quad \sum \frac{\cos^2 n}{n} z^n \ ; \quad \sum n! z^{2n} \ ; \quad \sum \frac{z^{n!}}{n!} \ ;$$

$$\sum 5^n z^{2n+1} \ ; \quad \sum a_n z^n \quad \text{avec} \quad a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$$

**Exercice 3 —** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{3^n}$.

**Exercice 4 —**
Trouver le rayon de convergence et faire l'étude aux bords de $\displaystyle\sum \frac{x^n}{\ln(n!)}$.

**Exercice 5 —** Déterminer le rayon de convergence des séries entières de terme général $a_n z^n$ avec :

$$a_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \qquad a_n = \frac{n^2}{3^n + n}$$

$$a_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) \qquad a_n = \frac{\operatorname{ch} n}{n} \qquad a_n = \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n$$

## Partie B – Calcul de sommes

**Exercice 6 —** Déterminer le rayon de convergence des séries entières réelles suivantes en précisant leur somme.

$$\sum \frac{n^3+n+3}{n+1} x^n \ ; \quad \sum \frac{n^2+2n-1}{(n+1)!} x^n \ ;$$

$$\sum \frac{2n+1}{2n+3} x^n \ ; \quad \sum \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n \ ; \quad \sum \operatorname{ch}(n) x^n$$

**Exercice 7 —** Donner le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières :

$$\sum \frac{n^3+n+1}{n+1} x^n \ ; \quad \sum \frac{n^2+n+1}{2^n} x^n \ ; \quad \sum \frac{n x^n}{(2n+1)!}$$

**Exercice 8 —** Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes.

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{4n} x^{4n-1} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+n+1}{n} x^n$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2n+1} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \operatorname{ch} n x^n \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+2)} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{(2n+1)!} x^n$$

**Exercice 9 —** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner le rayon de convergence et la somme des séries entières :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n \cos(n\alpha)}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n \sin(n\alpha)}{n!}$$

**Exercice 10 —** Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Calculer, pour $r \in [0, R[$, l'intégrale suivante :

$$I_r = \int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

**Exercice 11 —** À l'aide d'une série entière, déterminer la somme des séries numériques suivantes.

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\quad\text{et}\quad\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

**Exercice 12 —** Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes, calculer leur somme et, s'il y a lieu, étudier la convergence aux bornes.

$$\sum\frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}\ ;\quad\sum\frac{x^n}{2n+1}\ ;\quad\sum\frac{\operatorname{ch} n}{n!}x^n$$

**Exercice 13 —**

1. Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ au voisinage de $+\infty$.
2. En déduire le rayon de convergence et la somme de :

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$$

## Partie C – Développements en séries entières

**Exercice 14 —** Déterminer un développement en série entière des fonctions suivantes en 0. On précisera notamment le rayon de convergence et on étudiera la convergence aux bords.

$$f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{2-x}\right)\ ;\quad g(x)=\operatorname{sh}(x)\cos(x)\ ;$$

$$h(x)=\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)\ ;\quad k(x)=\frac{1}{x^2+x+1}\ ;\quad l(x)=\arcsin(x)$$

**Exercice 15 —** Développer en série entière les fonctions suivantes :

$$x\mapsto\ln\left(1+\frac{x^2}{1+x}\right)\ ;\quad x\mapsto\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)\ ;\quad x\mapsto\int_0^x\frac{t}{1-x\sin t}\,\mathrm{d}t$$

Pour ce dernier calcul, on laissera les coefficients exprimés sous forme d'intégrales.

**Exercice 16 —** En utilisant la technique de l'équation différentielle, trouver les développements en série entière des fonctions suivantes :

$$f: x\mapsto\arcsin^2(x)\quad\text{et}\quad g: x\mapsto[\ln(1+x)]^2$$

**Exercice 17 —** Soit $f: x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.
Prouver que la fonction $f$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 18 —**

1. Former de deux façons le développement en série entière en 0 de

$$f: x\mapsto\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

2. En déduire la relation :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}\binom{2n}{n}=\frac{4^n}{2n+1}$$

**Exercice 19 —** Déterminer le développement en série entière en 0 des fonctions suivantes :

$$f(x)=\ln(x^2-5x+6)\ ;\quad g(x)=\ln\left(\frac{2-x}{3-x^2}\right)\ ;\quad h(x)=\cos x\cdot\operatorname{ch} x\ ;$$

$$k(x)=\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)\ ;\quad l(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\quad m(x)=\frac{\ln(1-x)}{x-1}\ ;$$

$$p(x)=\int_0^x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t\ ;\quad r(x)=\int_{-\infty}^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}$$

**Exercice 20 —** Déterminer le développement en série entière en 0 de :

$$x\mapsto\operatorname{sh}(\arcsin x)\ ;\quad x\mapsto\int_x^1\frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\quad\text{et}\quad x\mapsto\arctan\left(\frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}\right)$$

avec $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

## Partie D – Exercices de synthèse

**Exercice 21 —**

1. Montrer que pour tout $a > 0$,
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$$
2. En déduire les somme des séries $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.
3. Montrer que pour tout $a < 0$,
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{-na+1}$$

**Exercice 22 —** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 0 \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+2} \end{cases}$$
On s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

1. Recherche du rayon de convergence
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant a_n \leqslant n+2$.
   b) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et déterminer le rayon de convergence de la série entière.
2. Calcul de la somme
   On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+2} x^{n+2}$.
   a) Déterminer le domaine de définition de $f$ et $g$.
   b) Établir une relation entre $f(x)$ et $g(x)$.
   c) Montrer que $g$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on déterminera.
   d) En déduire une expression de $f(x)$.

**Exercice 23 —** `Python`
Sachant que $\pi = 6 \arcsin \frac{1}{2}$, utiliser un développement en série entière de la fonction arcsin permettant d'obtenir un nombre donné de décimales exactes de $\pi$ à l'aide de Python.

**Exercice 24 —** `Banque PT 06`
On considère l'équation différentielle :
$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - y = 0. \quad (\mathcal{E})$$
On suppose que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0, R[$ où $R$ représente le rayon de convergence de cette série. On suppose de plus qu'elle n'est pas identiquement nulle.

1. Montrer que pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{(4n-3)(4n-5)}{8n(2n-1)} a_{n-1}$.
2. Quelle est la valeur du rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ ?
3. On suppose de plus que $a_0 = 1$. Déterminer $a_n$ en fonction de $n$.
4. Déterminer en utilisant la formule de Stirling un équivalent de $a_n$ en $+\infty$.

**Exercice 25 —** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2n-1}$.

1. Établir la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N} \ (n+1)a_{n+1} = -2(2n-1)a_n$$
2. Donner le rayon de convergence (noté $R$) de la série entière de somme associée $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
3. Montrer que $f$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on explicitera.
4. En déduire $f$.