Suites et séries numériques

Travaux dirigés #04

Partie A – Suites numériques

Exercice 1 — Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

Exercice 2 — On suppose qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2u_n \leqslant u_{n+1} + u_{n-1}$$

On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout entier n, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 — Prouver la convergence et déterminer la limite des suites de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor\,; \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}\,; \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^{-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Exercice 4 — Étudier la convergence de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0, u_1 > 0 \\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exercice 5 — Étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et par les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n(1-u_n)\,; \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

Exercice 6 — Étudier les trois suites récurrentes suivantes :

$$\begin{cases} u_0 \in]-1,+\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 \in [0,+\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} = \dfrac{3}{1+3v_n} \end{cases} \quad \begin{cases} w_0 = 1/2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ w_{n+1} = 1 - w_n^2 \end{cases}$$

♣ **Exercice 7 —** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la récurrence :

$$\begin{cases} u_1 \in]0,\pi[\\ u_{n+1} = \sin u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < u_n < \pi$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
2. Montrer que : $u_n - \sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^3}{6}$ puis que $u_n^2 - u_{n+1}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2 u_{n+1}^2}{3}$.
3. *Lemme de Cesàro*
   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$.
   Montrer que : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{3}$ puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n u_{n+1}^2 = 3$.
   En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 8 — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{8 + \dfrac{1}{2}u_n^2} \end{cases}$$

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note α sa limite éventuelle.
2. Écrire une fonction Python permettant d'afficher les 15 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer un majorant de $|u_n - \alpha|$ dépendant de n.
4. Comment calculer α à 10^{-4} près ?
5. Écrire une fonction Python permettant d'obtenir une telle approximation.

♣ Exercice 9 —

1. Pour tout $n \geqslant 3$, montrer que l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ admet une unique racine dans $]0,1[$ (notée x_n) et une unique racine dans $]1,+\infty[$ (notée y_n).
2. Donner un équivalent de x_n.
3. Donner la limite ℓ de y_n ainsi qu'un équivalent de $y_n - \ell$.

♣ Exercice 10 — Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction :

$$f_n : x \mapsto x^n + x - 1$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution $u_n \in]0,1[$.
2. Pour $\alpha \in]0,1[$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1-\alpha)$.
   En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = 1 - u_n$.
   Démontrer que $n\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\alpha_n$ puis établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(-\ln\alpha_n)}{\ln n} = 0$.
   INDICATION : *On pourra montrer que $\alpha_n > \dfrac{1}{n}$ à partir d'un certain rang.*
4. Prouver que $\ln\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln n$ puis en déduire que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercice 11 — Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes :

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \qquad c_n = \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$$
$$b_n = \mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad d_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$$

Exercice 12 — On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
Donner un développement asymptotique de I_n à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Partie B – Séries numériques

Exercice 13 — Convergence de $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$
On définit les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}\ ; \quad u_n = S_{2n}\ ; \quad v_n = S_{2n+1}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Qu'en déduit-on ?

Exercice 14 — Divergence de $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

1. Montrer pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ la double inégalité suivante :
$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$
2. En déduire les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :
$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\ ; \quad v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 15 — Étudier la convergence des séries proposées en précisant la limite de la suite des sommes partielles.

$$\sum_{n\geqslant 3} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}\ ; \quad \sum_{n\geqslant 0} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

Exercice 16 —

1. Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.
2. En déduire pour $x \in]-1,1[$ la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1}$.
3. En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (n - (-1)^n) 3^{-n}$.

Exercice 17 — Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Exercice 18 —

1. Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2-x+1}$$
2. Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 19 — Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

$$u_n = \frac{n!}{n^n} \qquad u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \qquad u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln n}}$$
$$u_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n} \qquad u_n = \arccos \frac{n}{n+1} \qquad u_n = \frac{1}{n \ln n}$$
$$u_n = \sin\left(\frac{n^2}{n+1}\pi\right) \qquad u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n\ln n + (-1)^n}$$

Exercice 20 —

1. On considère la série de terme général $u_n = \sin\left((2-\sqrt{3})^n\pi\right)$.
Montrer qu'elle est à termes positifs puis étudier sa convergence.
2. On pose $A_n = (2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n$. Montrer que A_n est un entier pair.
3. En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \sin\left((2+\sqrt{3})^n\pi\right)$.

Exercice 21 — Étudier la nature des séries de terme générale u_n.

1. $u_n = \cos\left(\pi\sqrt[3]{n^3+\frac{3}{2}n^2+1}\right)$;
2. $u_n = \sin(n!\pi\mathrm{e})$; (écrire $\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$)
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

Exercice 22 — Étudier la nature de la série dont le terme général est le suivant :

$$a_n = \frac{\ln^2 n}{n^\alpha} \quad (\alpha\in\mathbb{R}) \qquad b_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^3 n} \quad (\alpha \neq 1) \qquad c_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$$
$$d_n = \frac{1}{n\ln n} \qquad e_n = \frac{\mathrm{e}^n}{n!} \qquad f_n = \frac{\pi}{2} - \arctan(n^\alpha) \quad (\alpha > 0)$$
$$g_n = \frac{1}{n}(2-\sqrt[n]{3})^n \qquad h_n = \mathrm{e}^{-n\sqrt{\ln n}} \qquad j_n = \sin(2\pi n!\mathrm{e}) \text{ où } \mathrm{e} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$
$$k_n = \frac{n^n}{\mathrm{e}^n n!} \qquad p_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1} n\ln^2 k \qquad q_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$$

Exercice 23 — Calcul de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

On rappelle qu'il existe une constante réelle γ telle que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

1. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge mais qu'elle n'est pas absolument convergente. On pose alors $S = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.
Pour $n \geqslant 3$, on pose également :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n; \quad S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{\ln k}{k}; \quad t_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}; \quad a_n = t_n - \frac{\ln^2 n}{2}$$
2. a) Démontrer les inégalités pour $n \geqslant 3$:
$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln n}{n}.$$

b) En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et convergente.

3. Montrer que :
$$\forall n \geqslant 3, \quad S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)\ln 2.$$
En déduire une expression de S_{2n} où figurent a_n, a_{2n} et u_n.
4. Calculer et exprimer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}$ en fonction de γ et $\ln 2$. Déterminer S.

Exercice 24 — Séries de Bertrand
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ pour que la série suivante converge :
$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$$

Exercice 25 — Établir l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n}$.

Exercice 26 — Pour $n\geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Montrer la divergence de la série produit de Cauchy de $\sum u_n$ par elle-même.

Exercice 27 — Établir que :
$$\mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n!} \quad \text{où} \quad H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Exercice 28 — Étudier la nature de la série dont le terme général est le suivant, pour $\alpha > 0$:
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - \ln n}$$
$$x_n = (-1)^n\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \qquad y_n = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} \qquad z_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

Exercice 29 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictements positifs vérifiant :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. Pour quelles valeurs de α la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?
2. Pour quelles valeurs de α la série $\sum(-1)^n u_n$ converge-t-elle ?

Exercice 30 — Règle de Raabe-Duhamel
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'à partir d'un certain rang
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$
Montrer que $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.
2. On suppose que :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec } \alpha > 1$$
Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge.
3. On suppose cette fois-ci que :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec } \alpha < 1$$
Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.