Surfaces

Travaux dirigés #15

Dans tous les exercices, le plan et l'espace sont implicitement rapportés à des repères orthonormés directs $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *ou* $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

Partie A – Révisions de géométrie élémentaire

Exercice 1 — Soient $A(1,4)$, $B(4,1)$ et $C(-1,-2)$. Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC, de l'orthocentre H et du centre O du cercle circonscrit.

Exercice 2 —

1. Déterminer l'ensemble des points à égale distance des trois droites d'équations respectives $4x+3y-6=0$, $3x-4y-2=0$ et $y=-6$.
2. Quels sont les cercles tangents à ces trois droites ?

Exercice 3 —

1. Déterminer l'intersection du plan P d'équation $x-3y+3z-1=0$ et de la droite D d'équations $\begin{cases} x+y-10=0 \\ y+z-6=0 \end{cases}$
2. Déterminer le projeté orthogonal de D sur P

Exercice 4 — Soit P le plan passant par le point $A(1,2,-3)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1,0,-1)$ et $\vec{v}(2,3,4)$ et P' le plan d'équation $5x+6y+7z+8=0$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P.
2. Caractériser l'ensemble $P\cap P'$.

Exercice 5 — On considère l'ensemble :

$$\mathscr{S}=\{M(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0\}$$

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est une sphère. Déterminer son centre Ω et son rayon R.
2. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation : $2x+y+2z-5=0$. Déterminer $\mathscr{S}\cap\mathscr{P}$.

Exercice 6 — Soit D la droite passant par $A(3,2,1)$ et dirigée par $\vec{u}(1,-1,3)$ et D' la droite passant par $B(2,1,-2)$ et dirigée par $\vec{v}(-1,0,2)$. On pose $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$.

1. Les droites D et D' sont-elles coplanaires ?
2. Déterminer une équation du plan $P\ (A,\vec{u},\vec{w})$.
3. Déterminer l'intersection C de P et D'.
4. Soit Δ la droite passant par C et dirigée par $\vec{w}$. Montrer que Δ est perpendiculaire à D et à D'.

Exercice 7 — Soit P_m le plan d'équation $mx-y+(2-m)z+m=4$ $(m\in\mathbb{R})$ et P' celui d'équation $x+y+z=1$. On pose $\Delta_m=P_m\cap P'$.
Montrer que P_m contient une droite fixe et que Δ_m passe par un point fixe à préciser.

Exercice 8 —
Déterminer l'équation de la droite passant par $A(2,3,1)$ parallèle au plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x-5y+4z=1$ et coupant :

$$\Delta:\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ z-1=0 \end{cases}$$

Exercice 9 —

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, quel est l'angle formé par les deux plans $\mathscr{P}_1: 2x+4y-z+5=0$ et $\mathscr{P}_2: x+y+6z-8=0$.
2. Soit A le point de coordonnées $(2,1,4)$.
   Calculer la distance de A à $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$.

Exercice 10 —
Déterminer la distance du point M à la droite $\mathscr{D}$ dans les deux cas suivants.

1. $M(-1,1,3)$ et $\mathscr{D}:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2-\lambda \quad (\lambda\in\mathbb{R}) \\ z=2+2\lambda \end{cases}$
2. $M(-1,1,3)$ et $\mathscr{D}:\begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ 2x-y+z+1=0 \end{cases}$

Partie B – Généralités sur les surfaces

Exercice 11 — Un repère orthonormé étant donné, montrer que la courbe $\mathscr{C}$ de paramétrage :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = 2t \\ z(t) = t^2 + t + 1 \end{cases}$$

est plane et que c'est une parabole.

Exercice 12 — Déterminer de deux façons différentes l'équation du plan tangent en $A(1,0,0)$ de la nappe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(u,v) = u^2 + uv + v^2 \\ y(u,v) = u + v \\ z(u,v) = u^3 + v^3 \end{cases}$$

Exercice 13 — Déterminer les plans tangents à la surface d'équation $x - 8yz = 0$ contenant la droite d'équations $\begin{cases} y = 1 \\ x + 4z + 2 = 0 \end{cases}$

Exercice 14 — Soit la surface $(\mathscr{S})$ d'équation $(x^2 + y^2)z = x + y$.

1. Quelle est la projection orthogonale de $(\mathscr{S})$ sur le plan (xOy) ?
2. Quelle est la projection orthogonale de $(\mathscr{S})$ sur le plan (xOz) ?

Exercice 15 — Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $3x^2 + 4xy + 2yz + 4xz = 0$. Expliciter l'équation du plan tangent en un point régulier.

Exercice 16 — Soit $\mathscr{S}$ la nappe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(u,v) = u + v \\ y(u,v) = u^2 + v^2 \\ z(u,v) = u^2 - v^2 \end{cases}$$

1. Pour a réel, déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{S}$ tels que $(M, \vec{d})$ soit tangente à $\mathscr{S}$ en M avec $\vec{d} = (0,1,a)$.
2. Pour $a \neq -1$ et $a \neq 0$, déterminer la projection de cet ensemble sur le plan (xOy) suivant la direction $\mathbb{R}\vec{d}$.

Exercice 17 — Soient $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ les surfaces d'équations $x^2 + y^2 + xy = 1$ et $y^2 + z^2 + yz = 1$, et $\mathscr{C} = \mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$.

1. Donner en tout point de $\mathscr{C}$ un vecteur tangent à $\mathscr{C}$.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ est la réunion de deux courbes planes.
3. Quelle est la projection de $\mathscr{C}$ sur (xOz) ?

Partie C – Surfaces réglées

Exercice 18 — On considère la courbe $\mathscr{C}$ de paramétrage :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3 \end{cases}$$

On définit alors la réunion $\mathscr{S}$ des droites $\mathscr{T}_t$, chaque $\mathscr{T}_t$ étant la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $M(t)$.

1. Déterminer un paramétrage de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer les points stationnaires pour le paramétrage obtenu et déterminer pour les points réguliers une équation du plan tangent à la surface.
3. Montrer que tous les points réguliers d'une même génératrice $\mathscr{T}_t$ ont le même plan tangent.

Exercice 19 —

1. Soit $\mathscr{C}$ le cercle contenu dans le plan d'équation $y = 1$, de centre $A(0,1,1)$ et de rayon 1. Donner une représentation paramétrique de ce cercle.
2. On note $\mathscr{S}'$ la surface réglée engendrée par les droites joignant un point de $\mathscr{C}$ à son projeté orthogonal sur l'axe (Oz). Écrire une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$, réunion de $\mathscr{S}'$ et de l'axe (Oz).

3. Préciser la nature de la courbe intersection de $\mathscr{S}$ avec un plan parallèle à xOz.

Exercice 20 — Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ avec $a,b,c>0$.

1. On considère le point $A_\theta(a\cos(\theta),b\sin(\theta),0)$ où $\theta\in[0,2\pi]$. Montrer qu'il existe exactement deux droites passant par A_θ et contenues dans $\mathscr{S}$.
2. Si $x,y,u,v\in\mathbb{R}$ vérifient $x^2+y^2=u^2+v^2$, montrer qu'il est possible de trouver $\theta\in\mathbb{R}$ tel que :
$$\begin{cases} x=u\cos(\theta)-v\sin(\theta)\\ y=u\sin(\theta)+v\cos(\theta)\end{cases}$$
3. En déduire deux familles de droites engendrant $\mathscr{S}$ puis montrer que toute droite incluse dans $\mathscr{S}$ est dans l'une des deux familles précédentes.

Exercice 21 — Montrer que la surface $\mathscr{S}$ d'équation $z=x^3-3xy$ est réglée.

Exercice 22 — Soient $\mathscr{S}$ la sphère de centre $A=(a,0,0)$ et de rayon r avec $0<r<a$ et $\mathscr{S}'$ la surface constituée des droites horizontales tangentes à $\mathscr{S}$ et sécantes à Oz. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}'$.

Exercice 23 — Soit $a>0$. On considère deux droites :
$$\mathscr{D}_1:\begin{cases}y=a\\ z=a\end{cases}\quad\text{et}\quad \mathscr{D}_2:\begin{cases}x=a\\ z=0\end{cases}$$
Montrer que l'ensemble des points équidistants de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est une surface et en déterminer une équation. Préciser la nature de cette surface.

Exercice 24 — Déterminer un paramétrage et une équation du cylindre $\mathscr{S}$ de section droite $\mathscr{C}$ définie par le paramétrage suivant dans un repère orthonormé :
$$\begin{cases}x(t)=t^2\\ y(t)=t+1\\ z(t)=t^2-t+1\end{cases}$$

Exercice 25 — Pour quelles valeurs de α la surface d'équation $x(\alpha-y)+y(\alpha-z)+z(\alpha-x)=0$ est-elle un cône ? Préciser alors le sommet Ω et une directrice.

Exercice 26 — Vérifier que la surface $\mathscr{S}$ d'équation $x(y+z)=1$ est un cylindre de direction $\mathbb{R}\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(0,1,-1)$. Donner une section du cylindre $\mathscr{S}$ et préciser sa nature.

Exercice 27 — Soient a,b,c non nuls. On considère la courbe paramétrée :
$$\gamma:\begin{cases}x=at\\ y=bt^3\\ z=c(t^2+1)\end{cases}\qquad(t\in\mathbb{R})$$
Soit $\mathscr{S}$ la surface engendrée par les droites parallèles au plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et qui rencontre γ en deux points.

1. Écrire un paramétrage de $\mathscr{S}$ puis une équation cartésienne.
2. Quel est l'ensemble des points de $\mathscr{S}$ pour lesquels le plan tangent contient O ?

Exercice 28 — Déterminer une équation cartésienne du cylindre :

1. de directrice $\Gamma:\begin{cases}x^2+2y^2-z=0\\ x+y+z=0\end{cases}$ et de direction $\vec{u}(1,1,-1)$.
2. de section droite $\Gamma:\begin{cases}x(t)=t^2\\ y(t)=t+1\\ z(t)=t^2-t+1\end{cases}$
3. de révolution de rayon R et d'axe $D:\begin{cases}x=z+3\\ y=z-1\end{cases}$
Existe-il une valeur de R telle que ce cylindre soit tangent à la droite (Oz) ?

Exercice 29 — Déterminer l'équation du cylindre de direction de génératrices $\mathbb{R}\vec{u}$ avec $\vec{u}=(1,2,3)$, de base la courbe d'équation :
$$\begin{cases}z=0\\ (x-2)^2+3y^2=1\end{cases}$$

Exercice 30 — Déterminer une équation cartésienne du cône :

1. de directrice $\Gamma : \begin{cases} y = z \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$ et de sommet $\Omega(3,0,3)$.
2. de directrice $\Gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t+1 \end{cases}$ et de sommet $\Omega(1,1,1)$.
3. de révolution d'axe $D : \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$, de sommet O et de demi-angle au sommet $\dfrac{\pi}{6}$.

Partie D – Surfaces de révolution

Exercice 31 — Déterminer une équation de la surface $\mathscr{S}$ engendrée par la rotation autour de (Oz) de la courbe $\mathscr{C}$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 2 = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Exercice 32 — Déterminer une équation de la surface de révolution $\mathscr{S}$ engendrée par la rotation autour de l'axe (Oz) de la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \\ z(t) = \cos 2t \end{cases}$$

Exercice 33 — Déterminer l'équation de la surface de révolution d'axe (Oz), d'ensemble directeur la parabole d'équation :

$$\begin{cases} x = a \\ y = 3z^2 + a^2 \end{cases} \quad (a > 0)$$

Exercice 34 — Montrer que la surface d'équation $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2-y^2-z^2)$ est de révolution. Préciser son axe et tracer une méridienne.

Exercice 35 — Montrer que la surface d'équation $x^3+y^3+z^3-3xyz = 1$ est de révolution. Préciser son axe et tracer une méridienne.
INDICATION : *On remarquera que* $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.