Variables aléatoires réelles

Travaux dirigés #11

Partie A – Variables aléatoires finies

Exercice 1 — La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-4	-2	1	2	3
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,10	0,35	0,15	0,25	0,15

1. Tracer l'histogramme de X.
2. Donner sa fonction de répartition et en tracer le graphe.
3. Calculer $\mathbf{P}(X < 0)$, $\mathbf{P}(X > -1)$, $\mathbf{P}(-3.5 < X \leqslant -2)$ et $\mathbf{P}(-3.5 < X < -2)$.
4. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité des variables aléatoires suivantes : $|X|$, $X^2 + X - 2$, $\inf(X, 1)$, $\sup(X, -X^2)$.

Exercice 2 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On considère une v.a.r. X prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et dont la loi est de la forme :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \lambda k$$

Déterminer λ puis calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 3 — On tire au hasard deux pièces dans un lot de dix dont trois sont défectueuses. Soit N le nombre de pièces défectueuses obtenues. Déterminer la loi, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de N.

Exercice 4 — On utilise un dé cubique parfait. Combien faut-il effectuer de lancers pour affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition de l'as au cours des différents lancers différera de $\frac{1}{6}$ d'au plus $\frac{1}{100}$.

Exercice 5 — Une urne contient m boules numérotées de 0 à $m-1$ où m est un entier supérieur ou égale à 2. Une pièce de monnaie donne pile avec la probabilité p et face avec une probabilité $q = 1 - p$ où $p \in]0, 1[$.

On tire une boule dans l'urne de manière équiprobable puis on lance la pièce (indépendamment du tirage). On note X la v.a.r. qui vaut le numéro de la boule tirée si la pièce est tombée du côté pile et l'opposé de ce numéro si la pièce est tombée sur le côté face. Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 6 — On lance deux dés à 6 faces honnêtes. On note alors X le plus grand des numéros obtenus et Y le plus petit.

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$, comparer ces espérances et commenter.
3. Calculer $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$.

Exercice 7 — N urnes comportent chacune des jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard un numéro dans chaque urne, et on appelle X le plus grand des numéros tirés.

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
   Tracer son graphe pour $N = 3$ et $n = 6$.
2. Trouver la loi de X.
3. Calculer $\mathbf{E}(X)$. Quelle est la limite de $\mathbf{E}(X)/n$ quand n tend vers $+\infty$?
   En déduire un équivalent de $\mathbf{E}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Quelle est la limite de $\mathbf{E}(X)$ lorsque N tend vers $+\infty$? Commenter.

Exercice 8 — Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X.

1. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. X : nombre d'objets dans le premier tiroir.
2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. X : nombre de bosses.
3. On tire avec remise et successivement les cartes d'un jeu en contenant 32. X : rang d'apparition de la première dame.
4. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as de coeur. X : nombre de cartes que l'on a retournées.
5. On suppose que les probabilités de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. X est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.

6. On suppose que 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles. X : nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

Exercice 9 — Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Soit k un entier entre 1 et n. On tire de l'urne une poignée de k boules et on appelle X le plus grand nombre obtenu. Déterminer la loi de X.

Exercice 10 — Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise et on note X le plus grand et Y le plus petit des numéros obtenus.

1. Déterminer la fonction de répartition de X, puis la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.
2. Faire de même pour Y.
3. On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z et son espérance.

Exercice 11 — On dispose de deux boîtes A et B. La boîte A contient 4 boules rouges et 7 boules vertes. La boîte B contient 6 boules rouges et 5 boules vertes. On choisit une boîte au hasard puis une poignée de 3 boules dans celle-ci. Soit X le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de X puis son espérance.

Exercice 12 — Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$, on considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Calculer l'espérance de $1/(X+1)$.

Exercice 13 — On cherche à dépister une maladie grâce à des analyses de sang. On considère une population de n individus. On veut comparer deux méthodes.

- La première consiste à analyser individuellement tous les prélèvements.
- La seconde consiste à mélanger les n prélèvements et d'effectuer une analyse du mélange (on admettra que le résultat sera positif dès que l'une des n personnes est atteinte). Si le résultat est positif, alors on effectue une analyse individuelle de chacun des n prélèvements.

On note p la probabilité, pour un individu, d'être malade. On note X_n le nombre d'analyses nécessaires par la deuxième méthode.

1. Trouver la loi de X_n, puis calculer $\mathbf{E}(X_n)$.
2. Déterminer l'économie moyenne réalisée par personne. Pour quelle(s) valeur(s) de n est-elle maximale ?

Partie B – Variables aléatoires discrètes

Exercice 14 — Trouver λ pour que les suites suivantes définissent la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

1. $X(\Omega) = [\![2,+\infty[\![$ et $p_n = \dfrac{\lambda}{n^2-1}$ pour $n \geqslant 2$.
2. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $p_n = \dfrac{\lambda n}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 — Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue des tirages successifs, en remettant à chaque fois la boule tirée.

1. Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche.
   Reconnaître la loi de X_1 et donner sans calcul les valeurs de $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{V}(X_1)$.
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième boule blanche.
   Déterminer la loi de X_2 et calculer son espérance.
3. Comparer $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{E}(X_2)$.

Exercice 16 — Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est :

$$\forall s \in \left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[\qquad g_X(s) = \frac{s}{2-s^2}$$

1. Déterminer la loi de X.
2. Reconnaître la loi de $Y = \frac{1}{2}(X+1)$ et en déduire $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 17 — Fonctions de répartition de lois classiques

1. Soient $p \in]0,1[$ et une variable aléatoire X telle que $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.
   a) Déterminer la fonction de répartition de X.
   b) Retrouver le fait que la loi géométrique est une loi sans mémoire.
2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et une variable aléatoire Y telle que $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbf{P}(Y \leqslant n) = \frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^n \,\mathrm{d}x$$

   On pourra raisonner par récurrence.

Exercice 18 — Le nombre N de clients entrant dans un magasin en une journée suit une loi de Poisson de paramètre λ. Tim et Tom distribuent des prospectus aux clients à raison de 1 prospectus par client. Tim parie qu'à la fin de la journée, ils auront distribué un nombre pair de prospectus, tandis que Tom soutient qu'ils en auront distribué un nombre impair. Qui a raison ?

Exercice 19 — Soient a, α et β trois réels et, pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = a\dfrac{\alpha^k + \beta^k}{k!}$

1. Déterminer a en fonction de α et β pour que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définisse la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$.
2. Peut-il arriver que X suive une loi de Poisson ?

Exercice 20 — Tim dispose de n pièces équilibrées. Il procède à X lancers : au k^{e} lancer, il lance k pièces. Il s'arrête dès qu'il obtient au moins un pile ou bien après les n lancers.

1. Donner la loi de X.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

Exercice 21 — Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi de X sachant que $(X + Y = n)$.

Exercice 22 — Soient $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. On pose $Y = 1/X$. Calculer $\mathbf{E}(Y)$.

Exercice 23 — Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbf{P}(X = k) = ak^2\frac{\lambda^k}{k!}$$

où λ est un réel strictement positif et a un réel à déterminer.

1. En supposant qu'une telle variable puisse être définie, quelle est sa fonction génératrice ?
2. En déduire la valeur de a.
3. Calculer l'espérance de X.

Exercice 24 — Un insecte pond des œufs, dont le nombre suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque œuf a une probabilité p d'éclore. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'insectes nés. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 25 — Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et sont indépendantes. X suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et Y une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. On pose $Z = XY$ et on note g_X, g_Y et g_Z les fonctions génératrices de ces variables aléatoires.

1. Donner la fonction génératrice de Y.
2. Démontrer que $g_Z = g_Y \circ g_X$.
3. En déduire $\mathbf{E}(Z)$ et $\mathbf{V}(Z)$.

Exercice 26 — Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On les tire un à un, successivement, avec remise. Soit X, la variable aléatoire égale au nombre de tirages pour obtenir, pour la première fois, deux numéros distincts.

1. a) On désigne par A_i l'événement « le n°i apparaît au 1er tirage ». Calculer $\mathbf{P}(X = k|A_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.
   b) En appliquant convenablement la formule des probabilités totales, déterminer la loi de X.
2. Quelle est la loi de $Y = X - 1$?
   Donner sans calcul les valeurs de $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Partie C – Vecteurs aléatoires

Exercice 27 — On considère le couple aléatoire (X, Y) tel que :
$X(\Omega) = [\![1,3]\!]$, $Y(\Omega) = [\![0,3]\!]$ et :

$$\mathbf{P}((X,Y) = (i,j)) = \frac{i+2j}{60}$$

1. Construire le tableau de probabilités de ce couple.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

5. Déterminer les lois conditionnelles de X sachant $(Y=0)$ et de Y sachant $(X=1)$.
6. Soit $U = XY$ et $V = \inf(X, Y)$. Déterminer la loi conjointe de U et V.
7. Déterminer les lois de U et V. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 28 — Une urne contient a boules blanches et b boules noires $(a+b \geqslant 3)$. On tire successivement trois boules sans remise. Soient X, Y, et Z les v.a.r. respectivement égales à 1 si la première, la deuxième et la troisième boule tirée est blanche, et à 0 sinon.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (Y, Z).
2. En déduire les lois de Y et de Z.
3. Calculer $\mathrm{cov}(Y, Z)$ puis $\rho(Y, Z)$.

Exercice 29 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux étudiants tapent indépendamment l'un de l'autre sur une machine à calculer un nombre au hasard entre 0 et n. Soit S la variable aléatoire égale à la somme des deux nombres tapés.

1. Déterminer la loi de S et calculer son espérance.
2. En fait la machine à une capacité de calcul limitée, et si le résultat obtenu est exactement $2n$ elle affiche un résultat au hasard entre 0 et $2n-1$. Soit T la variable aléatoire égale au nombre affiché pour la somme des deux nombres tapés par les deux étudiants. Calculer la loi et l'espérance de T.

Exercice 30 — Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant toutes les deux une loi $\mathscr{B}(3, 1/2)$. Soit $Z = X - Y$.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Z et X sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathrm{cov}(X, Z)$.

Exercice 31 — On lance deux dés parfaitement équilibrés. Soit T la somme des points obtenus. Soit X le reste de la division de T par 2 et Y le reste de la division de T par 5.

1. Donner la loi conjointe de (X, Y).
2. Donner les lois marginales de X et de Y. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 32 — Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n. Une urne U_2 contient des boules rouges en proportion p. On tire une boule au hasard dans U_1 et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Si $X = k$, on tire k fois une boule dans U_2 avec remise et on appelle Y le nombre de boules rouges tirées.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de Y sachant $X = k$.
3. Déterminer la loi du couple (X, Y).

Exercice 33 — On lance n dés équilibrés et, pour tout entier i compris entre 1 et 6, on note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la face i est apparue au moins une fois et à 0 sinon. Donner la loi de X_i. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de numéros de faces différents obtenus. Calculer l'espérance de X.

Exercice 34 — On considère une suite de tirages successifs et sans remise dans une urne contenant $n-2$ boules rouges et 2 blanches. On note X le rang d'apparition de la première blanche et Y celui de la seconde.

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. En déduire les lois de X et Y, et leurs espérances.

Exercice 35 — On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.
3. Donner la loi de Y et son espérance.

Exercice 36 — On dispose au hasard n boules dans N tiroirs. Y désigne le nombre de boules dans un tiroir T donné. X est le nombre de tiroirs vides.

1. Donner la loi de Y.
2. Donner la loi du couple (X, Y) dans les cas $N = 2$ et $N = 3$.
3. Toujours pour $N = 2$ et $N = 3$, donner la loi de X.
4. Calculer l'espérance de X dans le cas général (sans chercher la loi de X).

Exercice 37 — Deux urnes contiennent chacune n jetons numérotés de 1 à n. On tire un jeton dans chaque urne. X_1 est le plus petit numéro et X_2 le plus grand. Donner la loi du couple (X_1, X_2).

Exercice 38 — Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \geqslant 2$). On en extrait successivement et sans remise deux jetons.
Soit X le numéro du premier jeton obtenu et Y celui du second.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Déterminer les lois marginales.
3. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = j)$.

Exercice 39 — Démontrer que deux variables de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.

Exercice 40 — Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
On note Y la variable aléatoire définie par $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que :

$$\mathbf{E}(Y) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Exercice 41 — Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p.

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $(S = k)$, où k est un élément de $S(\Omega)$.
3. Pour $n \in S(\Omega)$, calculer $\mathbf{P}(S \geqslant n)$.
4. Déterminer $\mathbf{P}(S \leqslant Z)$, $\mathbf{P}(S \geqslant Z)$ et $\mathbf{P}(S = Z)$.

Exercice 42 — Deux variables aléatoires suivent des lois géométriques à valeurs dans $\mathbb{N}$, de paramètres $p_1 \in]0, 1[$ et $p_2 \in]0, 1[$. On suppose qu'elles sont indépendantes et que $p_1 \neq p_2$. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 43 — Banque PT 2015
Soient X et Y deux variables entières positives ou nulles vérifiant, pour tout couple d'entiers naturels (i, j) :

$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} \text{ si } 0 \leqslant j \leqslant i \\ 0 \text{ si } 0 \leqslant i < j \end{cases}$$

où α et λ sont des constantes fixées vérifiant $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z.
4. Soit n un entier naturel.
   Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(Y = j | Z = n)$.
5. Que peut-on en déduire pour les variables Y et Z ?
6. On suppose que le nombre d'enfants d'une famille française est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre 2,2. On admet que la probabilité d'avoir un garçon est égale à $1/2$ et que les naissances successives sont indépendantes. Trouver la probabilité que cette famille ait i enfants dont j garçons.