B Révisions d'analyse

« Est rigoureuse toute démonstration, qui, chez tout lecteur suffisamment instruit et préparé, suscite un état d'évidence qui entraîne l'adhésion. »
René Thom (1923-2002)

Plan de cours

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de I ou une extrémité de I. Rappelons qu'un voisinage de x_0 est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert contenant lui-même x_0. On choisira souvent des voisinages de la forme $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$.

Notation usuelle : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

I | Limites et équivalents

A – Limites

Proposition B.1

Si on considère trois réels a, b, c,

- ⋆ $|a-b| < c \iff -c < a-b < c$;
- ⋆ $||a|-|b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|$ (inégalité triangulaire).

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$|x|=2; \quad |x|\leqslant 2; \quad |x+3|<2; \quad |x^2-1|\geqslant \frac{1}{2}.$$

En notant $\mathscr{S}_i$ les différents ensembles de solutions, on a :

$$\mathscr{S}_1=\{-2,2\}; \quad \mathscr{S}_2=[-2,2]; \quad \mathscr{S}_3=]-5,-1[; \quad \mathscr{S}_4=\left]-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right]\bigcup\left[-\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}}\right]\bigcup\left[\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty\right[.$$

Exercice 2

Soit x un réel vérifiant : $\forall \varepsilon>0,\ |x|<\varepsilon$. Que dire de x ?

Le réel x est nul ! Raisonnons pour cela par l'absurde en supposant x non nul. Quel que soit $\varepsilon>0$, $|x|<\varepsilon$; donc en prenant $\varepsilon=\frac{|x|}{2}>0$, on obtient : $|x|<\frac{|x|}{2}$ soit $1<\frac{1}{2}$! Absurde.

Exercice 3

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Que signifie la proposition suivante ?

$$\forall A\in\mathbb{R} \quad \exists B\in\mathbb{R} \quad \forall x>B \quad f(x)<A$$

Faire un dessin ! On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Définition B.2 : Limites

- On dit que f admet une limite finie ℓ en $x_0\in\mathbb{R}$ si :

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\alpha>0 \quad \forall x\in I \quad |x-x_0|<\alpha \Longrightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

- On dit que f admet $+\infty$ comme limite en $x_0\in\mathbb{R}$ si :

$$\forall A>0 \quad \exists\alpha>0 \quad \forall x\in I \quad |x-x_0|<\alpha \Longrightarrow f(x)>A$$

- On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si :

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists B>0 \quad \forall x\in I \quad x>B \Longrightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

Exercice 4

Traduire avec des quantificateurs la proposition : $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

On adapte les définitions précédentes dans le cas de limites à droite ou à gauche. Une fonction admet une limite en un point si et seulement si les limites à droite et à gauche existent et sont égales.

Proposition B.3 : Unicité de la limite

Lorsque la limite existe, elle est unique.

Démonstration

Supposons que $f(x)$ tend vers ℓ et ℓ' lorsque $x\to x_0\in\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon>0$. On a alors :

$$\exists\alpha>0 \quad \forall x\in I \quad |x-x_0|<\alpha \Longrightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

$$\exists\alpha'>0 \quad \forall x\in I \quad |x-x_0|<\alpha' \Longrightarrow |f(x)-\ell'|<\varepsilon$$

Posons alors $\alpha''=\max(\alpha,\alpha')$ et choisissons x tel que $|x-x_0|<\alpha''$, ce qui conduit à :

$$|\ell-\ell'|=|\ell-f(x)+f(x)-\ell'|\leqslant|f(x)-\ell|+|f(x)-\ell'|<2\varepsilon,$$

et ceci, quel que soit ε. On a donc $|\ell-\ell'|=0$, c'est-à-dire $\ell=\ell'$.
La preuve s'adapte facilement dans le cas où $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$. ■

Citons de plus les deux théorèmes de comparaison suivant :

Théorème B.4 : Théorème des gendarmes

Si f, g et h sont trois fonctions définies sur I vérifiant :

$$\forall x \in I \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell.$$

Alors g admet une limite en x_0 et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

Le théorème reste valable lorsque les trois fonctions sont définies sur $I \setminus \{x_0\}$.

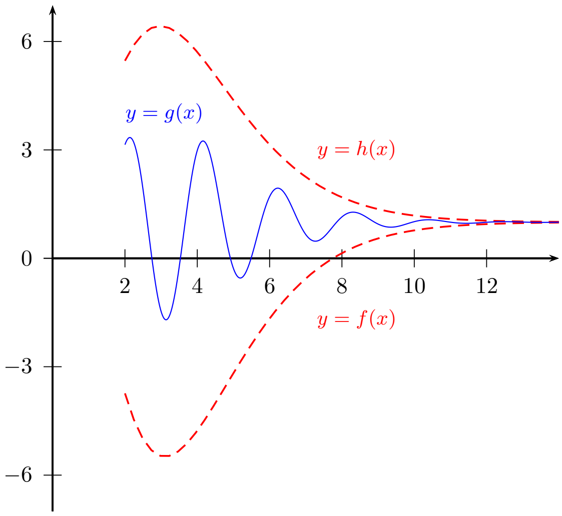


Illustration du théorème des gendarmes

Exercice 5

Montrer que $\dfrac{\cos(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

$0 \leqslant \left| \dfrac{\cos(x)}{x} \right| \leqslant \dfrac{1}{|x|}$ et on peut appliquer le théorème des gendarmes.

Théorème B.5 : Théorème de comparaison

Soit f et g deux fonctions définies sur I vérifiant :

$$\forall x \in I \quad f(x) \leqslant g(x) \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty.$$

Alors on a : $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

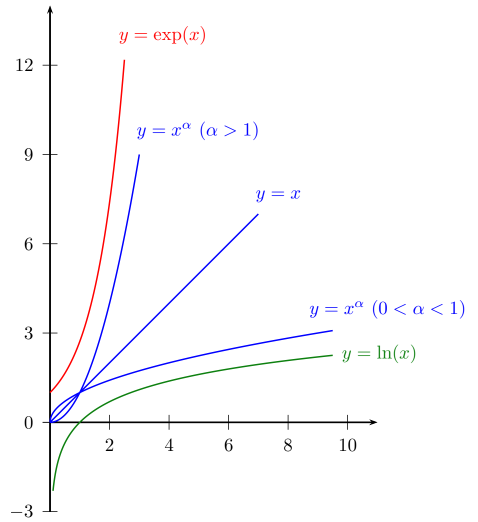
Les formes indéterminées suivantes sont à connaître : $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; 1^{∞}.

Pour finir, un certain nombre de limites classiques à retenir :

Théorème B.6 : Croissances comparées

Par croissance comparée,

$$x^{\alpha} \ln x^{\beta} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0; \quad \frac{\ln^{\beta} x}{x^{\alpha}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0; \quad x^{\alpha} \mathrm{e}^{-\beta x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0; \quad \frac{\mathrm{e}^{\beta x}}{x^{\alpha}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad (\alpha, \beta > 0)$$



Comparaison des fonctions exp, ln *et puissances*

Exercice 6

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x} - e^x + 18}{x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{\pi^2}{6}}$.
On trouve $+\infty$ par croissance comparée, après avoir factorisée par les quantités prépondérantes.

Exercice 7

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.
En revenant à la définition d'une puissance $\left(x^y = e^{y\ln(x)}\right)$ et en passant à la limite, on trouve e.

B – Branches infinies

On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

⋆ Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a \in \mathbb{R}$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = a$.

⋆ Si $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} \pm\infty$ avec $b \in \mathbb{R}$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = b$.

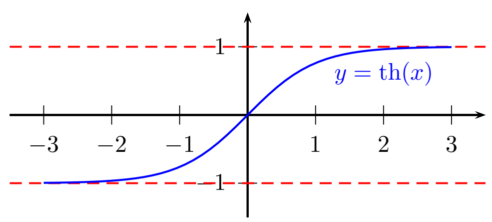
⋆ Si $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$ alors on détermine la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ pour connaître la nature de la branche infinie :

- Si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe (Ox). Ex. : $x \mapsto \sqrt{x}$.
- Si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe (Oy). Ex. : $x \mapsto x^2$.
- Si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} a$ alors on calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b$.
  $\mathcal{C}_f$ admet alors une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

Exemple 1

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$
$$= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$$

La courbe représentative de la fonction admet donc deux asymptotes horizontales d'équation $y = 1$ et $y = -1$.



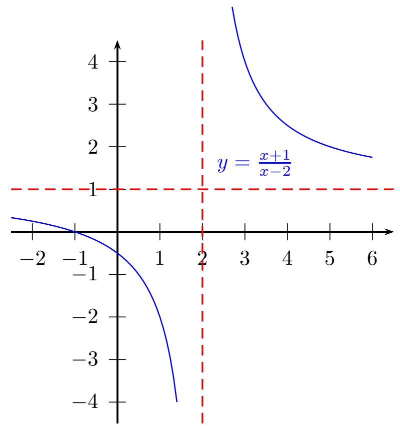
Représentation de la fonction th

Exemple 2

Considérons maintenant la fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\frac{x+1}{x-2} \xrightarrow[x \to 2^\pm]{} \pm\infty ; \qquad \frac{x+1}{x-2} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$$

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$ admet donc deux asymptotes verticale et horizontale d'équation $x = 2$ et $y = 1$.



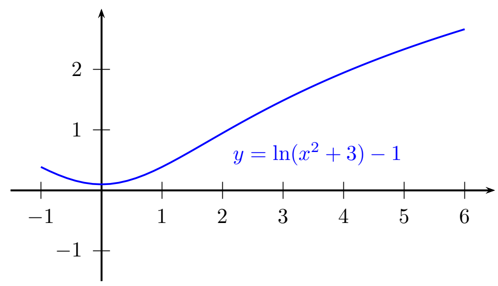
Représentation de la fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$

Exemple 3

La fonction $x \mapsto \ln(x^2+3) - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $\ln(x^2+3) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. De plus,

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x^2+3)-1}{x} &= \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\right)-1}{x} \\ &= 2\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{x} - \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0\end{aligned}$$

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln(x^2+3) - 1$ admet donc une branche parabolique horizontale.



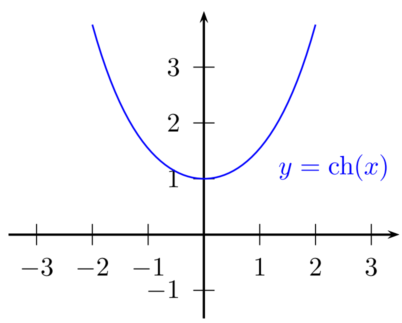
Représentation de la fonction $x \mapsto \ln(x^2+3) - 1$

Exemple 4

ch est définie sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.

$$\frac{\mathrm{ch}(x)}{x} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2x} = \frac{\mathrm{e}^x}{2x} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

La courbe représentative de la fonction ch admet donc une branche parabolique verticale.



Représentation de la fonction ch

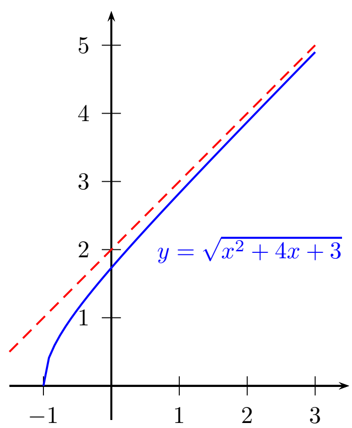
Exemple 5

$\sqrt{x^2+4x+3}$ existe si et seulement si $x^2+4x+3 = (x+1)(x+3) \geqslant 0$, donc $f : x \mapsto \sqrt{x^2+4x+3}$ est définie sur $]-\infty ; -3] \cup [-1 ; +\infty[$.
$\sqrt{x^2+4x+3} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+4x+3}}{x} = \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

$$\begin{aligned}f(x) - x = \sqrt{x^2+4x+3} - x &= x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} - 1\right) \\ &\underset{x \to +\infty}{\sim} x\frac{2}{x} = 2\end{aligned}$$

La courbe représentative de f admet donc une asymptote oblique d'équation $y = x + 2$.



Représentation de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+4x+3}$

C – Équivalents

Définition B.7

On dit que $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont équivalentes au voisinage de x_0 si :

$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x) \text{ où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

Si la fonction g est non nulle au voisinage de x_0, cela revient à dire que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$.

Théorème B.8 : Équivalents classiques

On a les équivalents :

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x; \quad 1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}; \quad \tan x \underset{x\to 0}{\sim} x; \quad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x;$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x; \quad \ln x \underset{x\to 1}{\sim} x - 1; \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \neq 0).$$

Démonstration

On interprète le quotient comme un taux d'accroissement.
Rappel : f est dérivable en x_0 si et seulement si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0, limite alors notée $f'(x_0)$. Par exemple,

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

Tous les autres équivalents (sauf dans le cas du cosinus) peuvent s'obtenir de la même manière.
De plus, $\cos(2u) = 1 - 2\sin^2(u)$ donc $1 - \cos(2u) = 2\sin^2(u) \underset{u\to 0}{\sim} 2u^2$.

En posant $x = \dfrac{u}{2}$, on obtient $1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. ■

- ⋆ Une fonction n'est jamais équivalente à 0 !
- ⋆ Si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ *non nul*, alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ell$.
  Ex. : $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.
- ⋆ On ne somme pas les équivalents !
  Si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$, on ne peut pas dire que $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$.

Composition d'équivalents :

- ⋆ Généralement, $f \sim g \not\Longrightarrow h \circ f \sim h \circ g$. Ex. : $e^{x+1} \not\sim_{+\infty} e^x$.
  Cela est cependant vrai dans certain cas : si $f \sim g$ et $\lim g \neq 1$ alors $\ln f \sim \ln g$.
  En cas de doute, on revient toujours au quotient et on regarde si la limite vaut 1.
- ⋆ Par contre, si $f \sim g$ alors $f \circ u \sim g \circ u$. Il s'agit en quelque sorte d'un changement de variables.
  Ex. : $\arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x$ car on a $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$ et on pose $t = \arcsin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

D – Comment calculer une limite ? déterminer un équivalent ?

— Se lancer dans un calcul direct et vérifier qu'on a bien une forme indéterminée.

Ex. : $\dfrac{e^{-x} + 2}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$, pas de forme indéterminée ici.

— Penser à factoriser.

Ex. : $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(x-4)}{x-2} = x - 4 \xrightarrow[x\to 2]{} -2$.

— Les changements de variable permettent de se ramener à un calcul de limite en 0 ou en $\pm\infty$, ce qui peut s'avérer pratique pour pouvoir utiliser les équivalents usuels.

Ex. : $\dfrac{1-\sqrt{2}\cos(x)}{x-\pi/3} = \dfrac{1-\sqrt{2}\cos(u+\pi/3)}{u} = \dfrac{1-\cos(u)}{u} + \sqrt{3}\dfrac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} \sqrt{3}$ où $u = x-\pi/3$ car :

$$\frac{1-\cos(u)}{u} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u^2}{2u} = \frac{u}{2} \xrightarrow[u\to 0]{} 0; \quad \frac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$$

— Avoir recours à un équivalent ou à un développement limité selon le contexte (somme, produit?).

— Faire apparaître des taux d'accroissement.

— « A-t-on le droit de ...? »

On calculera $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ pour montrer que $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x))$.

Dans un premier temps, mieux vaut se lancer dans les calculs sans se poser de questions, quitte à les justifier par la suite.

Attention, une limite n'existe pas toujours!

Exemple

$\cos(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$. En effet, si c'était le cas, $\cos(n\pi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Or $\cos(n\pi) = (-1)^n$ n'admet pas de limite lorsque $n \to +\infty$. Contradiction.

II | Continuité

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

A – Définition et exemples

Définition B.9 : Continuité

f est dite continue en $x_0 \in I$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, *i.e.* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I \quad |x-x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

Généralisation à un intervalle, discontinuité, interprétation graphique, continuité à droite / à gauche.

Exemples

- ⋆ Les fonctions polynomiales et les fractions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.
- ⋆ Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction tangente sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.
- ⋆ La valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
- ⋆ $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est discontinue en 0, pourquoi?

La somme, le produit et la composée de fonctions continues sont continues.

Attention au quotient! Un quotient de fonctions continues sur un intervalle I *dont le dénominateur ne s'annule pas* est continue sur I.

Si f et g sont continues sur I, c'est également le cas pour $|f|$, $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$.

B – Rappels sur l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité

On considère une fonction $f : E \to F$ où E et F sont deux ensembles quelconques.

⋆ f est dite injective si tout élément de F admet au plus un antécédent dans E. Autrement dit,

$$\forall x, y \in E \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

⋆ f est dite sujective si tout élément de F admet au moins un antécédent dans E. Cela revient à dire que :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$$

ou également à dire que $f(E) = F$.

⋆ f est dite bijective ssi elle est injective et surjective, *i.e.* que :

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad y = f(x)$$

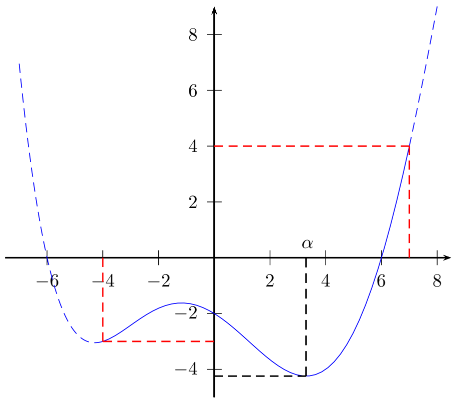
C – Continuité sur un intervalle

Théorème B.10 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I avec $a, b \in I$ vérifiant $a < b$.
Alors pour tout réel y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $I = [-4; 7]$ dont on donne la représentation graphique suivante :



La fonction f prend toutes les valeurs « intermédiaires » entre -3 et 4

Comme $f(-4) = -3$, $f(7) = 4$ et que f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires affirme que pour tout $y_0 \in [-3; 4]$, il existe $x_0 \in [-4; 7]$ tel que $y_0 = f(x_0)$. Attention, l'antécédent n'est pas nécessairement unique! Par exemple, combien le réel -2 admet-il d'antécédent par f sur l'intervalle I ?

Théorème B.11 : TVI bis

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Dans l'exemple précédent, $f([-4; 7]) = [f(\alpha); 4]$. On notera également que $f([-4; 7]) \neq [f(-4); f(7)] = [-3; 4]$.

Corollaire B.12

Une fonction continue qui change de signe sur I s'annule (au moins une fois) sur I.

Exercice 8

❶ Montrer qu'un polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.
❷ Soit $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ continue. Montrer que f admet au moins un point fixe. (Théorème de Brouwer, à illustrer)

D – Continuité sur un segment

Un segment est un intervalle fermé et borné du type $[a, b]$.

Théorème B.13

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Ce théorème prouve l'existence d'un minimum et d'un maximum mais n'en donne pas la valeur. Il faut pour cela avoir recours à un tableau de variations.

Exercice 9

Dans l'exemple de la partie C, f est continue sur le segment $[-4;7]$ et son image est bien un segment : c'est le segment $[f(\alpha), 4]$.

On remarquera qu'en général, $f([a,b]) \neq [f(a), f(b)]$.

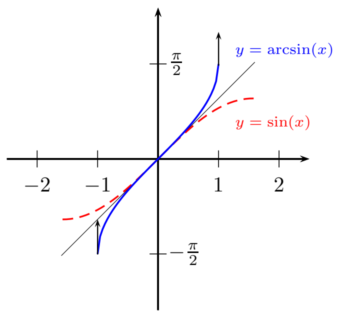
E – Bijections

Théorème B.14 : Théorème de la bijection

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ que l'on suppose continue et strictement monotone sur I.
Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.
La bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est alors continue et de même monotonie que f.

Le graphe de f^{-1} est symétrique à celui de f par rapport à la première bissectrice.

Définitions et propriétés des fonctions arccos, arcsin et arctan :



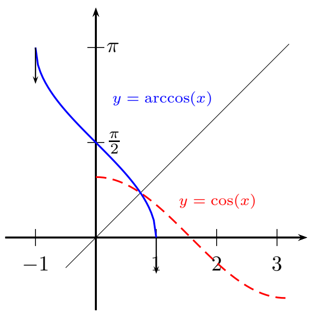
Représentation de la fonction arcsin

La fonction sinus étant continue et strictement croissante sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, elle réalise une bijection de I dans $\sin(I) = [-1,1]$. Sa bijection réciproque, notée arcsin, est donc définie sur $[-1,1]$ et à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle est également continue et strictement croissante.

$$\forall x \in [-1,1] \qquad \sin(\arcsin(x)) = x$$
$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \arcsin(\sin(x)) = x$$

La fonction arcsin est enfin impaire :

$$\forall x \in [-1,1] \quad \arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$



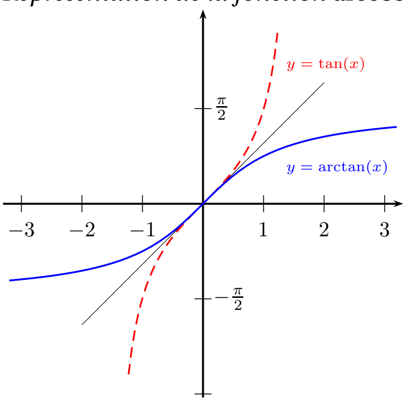
Représentation de la fonction arccos

La fonction cosinus étant continue et strictement décroissante sur $I = [0,\pi]$, elle réalise une bijection de I dans $\cos(I) = [-1,1]$. Sa bijection réciproque, notée arccos, est donc définie sur $[-1,1]$ et à valeurs dans $[0,\pi]$. Elle est également continue et strictement décroissante.

$$\forall x \in [-1,1] \qquad \cos(\arccos(x)) = x$$
$$\forall x \in [0,\pi] \qquad \arccos(\cos(x)) = x$$

La fonction arccos vérifie enfin :

$$\forall x \in [-1,1] \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$



Représentation de la fonction arctan

La fonction tangente étant continue et strictement croissante sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, elle réalise une bijection de I dans $\tan(I) = \mathbb{R}$. Sa bijection réciproque, notée arctan, est donc définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle est également continue et strictement croissante.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \tan(\arctan(x)) = x$$
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \arctan(\tan(x)) = x$$

La fonction arctan est impaire vérifie enfin :

$$\forall x > 0 \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 10

Montrer de même que les fonctions ch et sh réalisent une bijection sur un intervalle à préciser et donner une expression explicite de argch(x) et argsh(x).

F – Prolongement par continuité

On considère dans ce paragraphe un intervalle I, un réel $x_0 \in \overline{I}$ (c'est-à-dire que $x_0 \in I$ ou x_0 est une extrémité de I). Par exemple, si $I =]-2;3]$, $x_0 \in [-2;3]$. On considère enfin une fonction f définie et continue sur $I \setminus \{x_0\}$.
On peut toujours prolonger f en x_0 en posant $f(x_0) = \ell$ avec ℓ un réel choisi arbitrairement. Il y a cependant peu de chances pour que f soit continue sur I ! Il faudrait pour cela que $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0) = \ell$.
De manière générale, si f admet une limite finie en x_0 et qu'on pose $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, on dira qu'on a prolongé f par continuité, la fonction obtenue étant continue sur I tout entier.

Exemple

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Comme $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$, on peut prolonger f par continuité en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \tilde{f}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad \tilde{f}(0) = 1$$

La nouvelle fonction $\tilde{f}$ ainsi définie est bien continue sur $\mathbb{R}$!

On ne peut pas toujours prolonger une fonction par continuité comme le montre l'exemple $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

III | Dérivabilité

A – Généralités

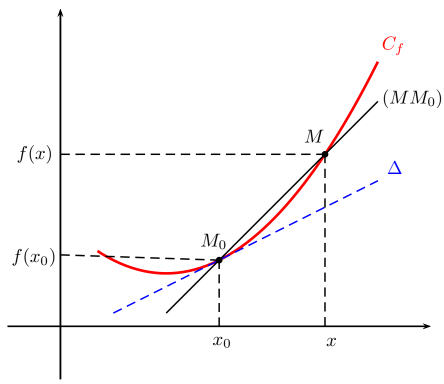
Définition B.15 : Dérivabilité

La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite dérivable en $x_0 \in I$ si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ possède une limite finie en x_0.

On note cette limite $f'(x_0)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

Définition B.16 : Tangente à une courbe en un point

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f : I \to \mathbb{R}$, supposée continue sur I. Soit $M_0 \in \mathcal{C}_f$ le point d'abscisse x_0. Pour $x \in I \setminus \{x_0\}$, M désigne le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x.
Une droite Δ passant par M_0 est dite tangente à la courbe en M_0 si le coefficient directeur de la droite (MM_0) tend vers celui de Δ quand x tend vers x_0.



Tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en un point M_0

La pente de la droite (MM_0) n'étant rien d'autre que le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ de f en x_0, on a le résultat fondamental suivant :

Théorème B.17 : Interprétation géométrique de la dérivabilité

On conserve les mêmes notations que dans la définition précédente. Si f est dérivable en x_0, sa courbe représentative possède au point M_0 une tangente d'équation :

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Exercice 11

Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x_0 > 0$. Alors,

$$\forall x>0 \quad \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{x_0}^2}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Ainsi, $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

On vérifie au passage que la fonction n'est pas dérivable en 0 (bien que continue) car $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to x\to 0^+]{} +\infty$.

On vérifie de la même manière que les fonctions exp, ln, cos, sin et que toutes les fonctions polynomiales sont dérivables sur leur domaine de définition. On peut alors utiliser les théorèmes généraux (somme, produit, composée de fonctions dérivables) pour justifier la dérivabilité de fonctions plus « élaborées ».

Proposition B.18

Si les fonctions f et g sont dérivables et que g ne s'annule pas, il en va de même pour les fonctions $f+g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ et $g\circ f$. On a alors :

$$(f+g)' = f'+g'; \quad (fg)' = f'g+fg'; \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf'-fg'}{g^2} \quad \text{et} \quad (g\circ f)' = f'\cdot(g'\circ f)$$

Démonstration

Il suffit de revenir à la définition pour vérifier ces propriétés. Voici par exemple la démonstration dans le cas du quotient (en supposant f et g dérivables sur un intervalle I et g ne s'annulant pas sur I) :

$$\begin{aligned}
\forall x\in I \quad \frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} &= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\cdot\frac{f(x)g(x_0)-g(x)f(x_0)}{x-x_0}\\
&= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\cdot\left[\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-g(x)f(x_0)}{x-x_0}\right]\\
&= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\cdot\left[g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\right]\\
&\xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{1}{g(x_0)^2}\cdot\left[g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)g'(x_0)\right]
\end{aligned}$$

■

On pourra rédiger la preuve dans le cas du produit pour s'assurer de sa bonne compréhension.

Nous avons utilisé dans la démonstration précédente le fait que $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} g(x_0)$, mais nous n'avons pas encore prouvé que g est continue en x_0, argument indispensable pour pouvoir conclure ! Le mal va désormais être réparé :

Théorème B.19

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Démonstration

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Montrons que f est continue en x_0. Montrons pour cela que $f(x) - f(x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \cdot f'(x_0) = 0$$

■

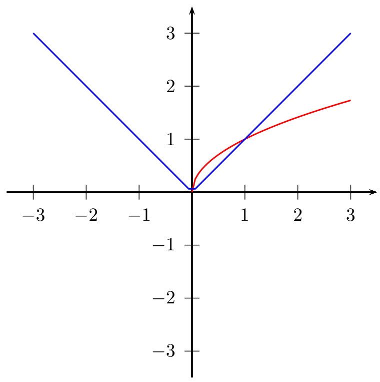
Autrement dit, **toute fonction dérivable est continue**. Attention, **la réciproque est fausse !**

Exemples

Les fonctions $x \longmapsto |x|$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ sont continues en 0 et non dérivables en 0.

La courbe représentative de $\sqrt{\cdot}$ admet une demi-tangente verticale (caractérisation du fait que la demi-tangente admet une pente infinie).

La courbe représentative de $|\cdot|$ admet un point anguleux, les demi-pentes à droite et à gauche diffèrent (caractérisation du fait que la fonction est dérivable à droite et à gauche en 0 mais avec des nombres dérivés distincts).



Interprétations géométriques de la non dérivabilité

f est dérivable en x_0 si et seulement si $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$. (Taylor-Young à l'ordre 1)

Si de plus $f'(x_0) \neq 0$, $f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$.

B – Dérivée et bijection réciproque

D'après le théorème de la bijection, si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, f réalise une bijection de I dans $f(I)$ et sa bijection réciproque est automatiquement continue sur $f(I)$. Il n'en va pas de même pour la dérivabilité : il ne suffit pas que f soit dérivable sur I pour que f^{-1} le soit sur $f(I)$, comme le montre le théorème suivant.

Théorème B.20 : Dérivabilité de la bijection réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I et f^{-1} sa bijection réciproque.
Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

On peut retrouver rapidement la formule en partant de la relation $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$. En dérivant $f^{-1}(f(x)) = x$, on obtient :

$$f'(x) \cdot (f^{-1})'(f(x)) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Attention, ceci ne constitue pas une démonstration rigoureuse du théorème précédent, nous avons dérivé f^{-1} sans avoir au préalable justifié sa dérivabilité. Il faudrait pour cela revenir au taux d'accroissement.

On notera que ce théorème n'est que la traduction rigoureuse d'un résultat qui paraît assez évident au physicien :

$$\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

La pente de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} en $(f(x_0), x_0)$ est donc l'inverse de la pente de la tangente à la courbe représentative de f en $(x_0, f(x_0))$.

Exemples

- arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
En effet, cos est dérivable sur $[0,\pi]$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $]0,\pi[$ donc arccos est dérivable sur $\cos(]0,\pi[) =]-1,1[$ et :
$$\forall y \in]-1,1[\quad \arccos'(y) = \frac{1}{-\sin(\arccos(y))}$$
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$, $\sin^2(\arccos(y)) = 1-\cos^2(\arccos(y)) = 1-y^2$. De plus, comme $y \in]-1,1[$, $\arccos(y) \in [0,\pi]$ donc $\sin(\arccos(y)) \geqslant 0$. Ainsi, $\sin(\arccos(y)) = +\sqrt{1-y^2}$ et :
$$\forall y \in]-1,1[\quad \arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$
- arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Adapter le raisonnement précédent au cas du sinus.
- arctan est dérivable sur $]-\infty,+\infty[$ et $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. $\tan'(x) = 1+\tan^2(x) > 0$ donc arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1+y^2}$$

Les résultats des exemples précédents sont à connaître. En cas de doute sur le signe à placer devant $\sqrt{1-y^2}$ dans l'expression des dérivées de arccos et arcsin, n'oubliez pas que ces fonctions ont même monotonie que cos et sin. On retrouve ainsi le signe des dérivées.

De plus, la non dérivabilité des fonctions arccos et arcsin en ± 1 se traduit par la présence de demi-tangentes verticales.

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}$. Préciser sur quel intervalle la fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection (en fonction de la parité de n) et déterminer par deux méthodes distinctes une expression de la dérivée de la bijection réciproque.

C – Dérivées d'ordre supérieur

Définition B.21 : Fonction de classe $\mathscr{C}^n$

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue sur I.

Exercice 13

- exp et les fonctions polynomiales sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  - ⋆ f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions continues et :
  $$\forall x \neq 0 \quad 0 \leqslant |f(x)| \leqslant x^2$$
  ce qui nous assure, d'après le théorème des gendarmes, que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0)$. La fonction est donc continue en 0. D'où la continuité sur $\mathbb{R}$.
  - ⋆ f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions dérivables et :
  $$\forall x \neq 0 \quad 0 \leqslant \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant x$$
  ce qui nous assure, d'après le théorème des gendarmes, que $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
  La fonction est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. D'où la dérivabilité sur $\mathbb{R}$.
  - ⋆ f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Cependant, f' n'est pas continue en 0 :
  $$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
  Or $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ mais $-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite, donc f' n'admet pas de limite en 0.

Proposition B.22 : Formule de Leibniz

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. Alors, fg est également de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Cette formule peut s'avérer utile pour les polynômes.

D – Extremum, théorème de Rolle et des accroissements finis

Définition B.23

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f admet un maximum local (respectivement un minimum local) en x_0 s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

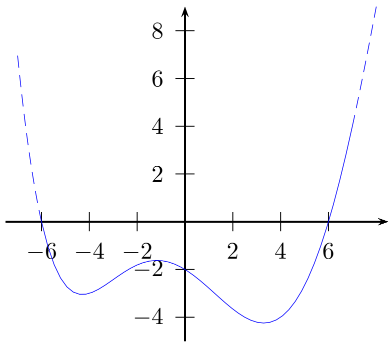
$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap I \quad f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0))$$

On pourrait traduire cela par : « Au voisinage de x_0, f ne prend que des valeurs inférieures (ou supérieures) à $f(x_0)$ ».

Le plus grand des maximums locaux, lorsqu'il existe, est appelé maximum global de f sur I. Idem pour le minimum global.

Exemple

Soit f la fonction dont on donne la courbe représentative suivante :



La fonction f admet sur $[-6,7]$ deux minimums locaux et trois maximums locaux (ne pas oublier les maximums locaux atteints aux bornes de l'intervalle).

Il est d'ailleurs assez naturel que la fonction f admette un maximum global et un minimum local : f étant continue sur un segment, elle est bornée et atteint ses bornes.

Théorème B.24 : Extremums d'une fonction à variable réelle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur de I (c'est-à-dire qui n'est pas une extrémité de I). On suppose f dérivable sur I. Si f atteint un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration

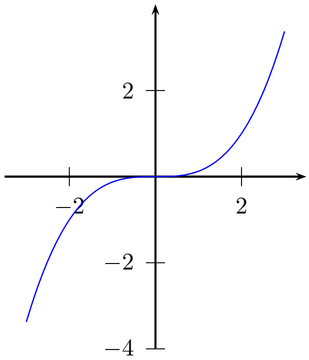
On suppose que f admet un maximum local en x_0.

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\quad f(x) \leqslant f(x_0)$$

D'une part, pour $x \in]x_0 - \alpha, x_0[$, $x - x_0 < 0$ donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$. Ainsi, en passant à la limite, $f'(x_0) \geqslant 0$.
D'autre part, pour $x \in]x_0, x_0 + \alpha[$, $x - x_0 > 0$ donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$. Ainsi, en passant à la limite, $f'(x_0) \leqslant 0$.
Au final, on a bien $f'(x_0) = 0$.
On procéderait de même dans le cas d'un minimum local. ■

Les extremums de f sont donc à chercher parmi les points où la dérivée s'annule. Cela se traduit géométriquement par la présence d'une tangente horizontale. Mais **attention aux hypothèses!** Dans l'exemple précédent, il y a deux maximums locaux atteints au bord de l'intervalle, il n'y a aucune raison que la dérivée s'annule (pas de tangente horizontale). Par contre, on notera bien la présence de trois tangentes horizontales pour les points intérieurs.

De plus, la réciproque est fausse, la dérivée peut s'annuler sans que la fonction admette un extremum local.



La dérivée de $x \mapsto \frac{x^3}{8}$ s'annule en 0 sans que la fonction atteigne un extremum

Enfin, si f n'est pas dérivable, le théorème précédent ne s'applique plus. Ex. : $x \mapsto |x|$ admet en minimum en 0 bien qu'elle ne soit pas dérivable en ce point.

Théorème B.25 : Théorème de Rolle

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a)=f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

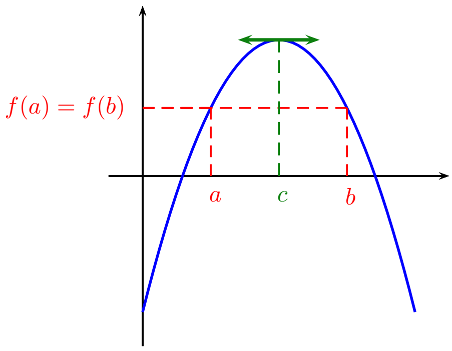


Illustration du théorème de Rolle

Démonstration

Supposons f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)$.
f étant continue sur un segment, elle est bornée et atteint ses bornes, que l'on notera m et M.
Autrement dit,

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a,b] \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$$

- ⋆ Si $m = M$, f est constante et sa dérivée est nulle, non pas en un point de l'intervalle, mais sur $]a,b[$ tout entier.
- ⋆ Si $m \neq M$, et comme $f(a)=f(b)$, il y a au moins un des deux extremums qui est atteint ailleurs qu'en a ou b (par exemple en c). D'après le théorème précédent, f' s'annule bien en $c \in]a,b[$.

■

Le théorème de Rolle s'interprète géométriquement par la présence d'une tangente horiontale.

Théorème B.26 : Formule des accroissements finis

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

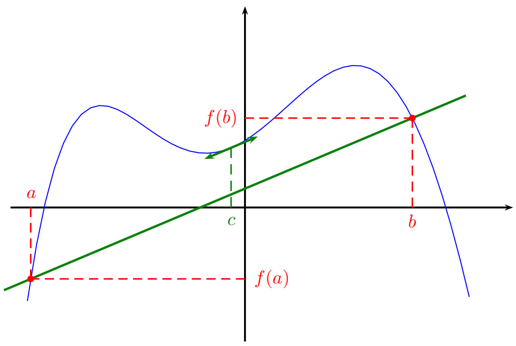


Illustration du théorème des accroissements finis

- *Interprétation géométrique* : la pente de la corde (représentée en vert sur le graphe) est $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Et comme elle vaut par ailleurs $f'(c)$, cela signifie qu'il existe (au moins) une tangente à la courbe parallèle à cette droite. D'ailleurs, il existe dans l'exemple précédent trois tangentes parallèles à cette corde, une seule est représentée ici. *Pouvez-vous trouver les deux autres ?*
- *Interprétation cinématique* : un TGV roulant à la vitesse moyenne de 300 km/h aura, à un moment donné du trajet, une vitesse instantanée de 300 km/h.

Démonstration

La preuve de ce résultat repose sur une utilisation astucieuse du théorème de Rolle, donnons-la à titre indicatif. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, supposée dérivable sur $]a,b[$. On considère la fonction g définie par :

$$\forall x \in [a,b] \quad g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

D'une part, g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
D'autre part, $g(a) = g(b) (= f(a))$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Or $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ donc $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Supposons maintenant que f continue et dérivable sur un intervalle I et l'on suppose de plus que f' est bornée sur cet intervalle. Cela signifie que :

$$\exists M > 0 \quad \forall c \in I \quad |f'(c)| \leqslant M$$

D'après le théorème des accroissements finis, on peut en déduire que :

$$\forall x, y \in I \quad \exists c \in]x,y[\quad |f(x)-f(y)| = |f'(c)| \cdot |x-y| \leqslant M|x-y|$$

On vient de démontrer le théorème suivant :

Théorème B.27 : Inégalité des accroissements finis

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et que $|f'|$ est bornée par une constante réelle M, alors :

$$\forall x, y \in I \quad |f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$$

On notera que la condition suivante est vérifiée dès que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a,b]$: f est dérivable (donc continue) sur $[a,b]$; de plus, f' étant continue sur le segment $[a,b]$, elle est bornée.

Ce résultat a des conséquences fondamentales (voir paragraphe suivant). Nous aurons l'occasion de l'appliquer dans les prochaines semaines à l'étude de suites.

Exercice 14

Montrons que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $|\tan(x)| \geqslant |x|$.

Notons que ce résultat est trivialement vrai pour $x = 0$.
De plus, d'après le théorème des accroissements finis appliqués au segment $[x;0]$ ou $[0;x]$:

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\} \quad \exists c \in]0;x[\quad \left|\frac{\tan(x)-\tan(0)}{x-0}\right| = 1+\tan^2(c)$$

Comme $|1+\tan^2(c)| \geqslant 1$, on en déduit que : $|\tan(x)| \geqslant |x|$.
REMARQUE : *Une simple étude de la fonction* $x \mapsto \tan(x) - x$ *aurait pu convenir pour justifier l'inégalité.*

E – Monotonie et dérivabilité

Théorème B.28

Soit f une fonction dérivable sur un *intervalle* I.

- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.
- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I.

Démonstration

Nous ne donnerons qu'une preuve du premier résultat. Il suffit de remplacer les égalités par des inégalités pour démontrer le second.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $x_0 \in I$. Si f est constante, pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$$

En faisant tendre x vers a, on obtient $f'(x_0) = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que f' est nulle sur I. Soient $x, y \in I$.
D'après le théorème des accroissements finis, $f(x)-f(y) = 0\cdot(x-y) = 0$ donc f est constante.

On ne le répétera jamais assez, le théorème précédent n'est valable que sur un intervalle. Cela explique pourquoi la résolution d'une équation différentielle doit s'effectuer sur un intervalle : à chaque intervalle sa constante d'intégration...

Attention à la stricte monotonie : si f' est strictement positive (resp. strictement négative) alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante). Mais la réciproque est fausse, f peut être strictement croissante sans que sa dérivée soit strictement positive [1], comme le montre l'exemple de $x \mapsto x^3$.

F – Limite de la dérivée

Lorsqu'on s'intéresse à la dérivabilité d'une fonction f en un point x_0, c'est-à-dire à l'existence de la limite de $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, on peut être fortement tenté de calculer $f'(x)$ puis faire tendre x vers x_0 comme dans l'exemple suivant :

Exemple 1

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

- ⋆ f est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est évidemment continue sur $\mathbb{R}^*$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0)$.
- ⋆ f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
- ⋆ f est dérivable en 0 car :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

  On trouve ainsi $f'(0) = 1$.
- ⋆ De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 2-1 = 1$$

  Étrange...

Que peut-on en conclure ? Qu'il suffisait de calculer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ pour justifier la dérivabilité de f en 0 ? Et si cette limite était infinie ou n'existait pas, la fonction ne serait donc pas dérivable ? L'exemple suivant (déjà étudié) montre que tout n'est pas si simple.

Exemple 2

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

- ⋆ f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions continues et :

$$\forall x \neq 0 \quad 0 \leqslant |f(x)| \leqslant x^2$$

  ce qui nous assure, d'après le théorème des gendarmes, que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0)$.
  La fonction est donc continue en 0. D'où la continuité sur $\mathbb{R}$.

1. en fait, f' peut s'annuler mais il ne faut pas que f' soit identiquement nulle sur un intervalle $[a, b] \subset I$.

- ⋆ f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions dérivables et :

$$\forall x \neq 0 \quad 0 \leqslant \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant x$$

ce qui nous assure, d'après le théorème des gendarmes, que $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
La fonction est donc dérivable en 0 et $f'(0)=0$. D'où la dérivabilité sur $\mathbb{R}$.

- ⋆ f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Pourtant, $f'(x) \not\xrightarrow[x\to 0]{} 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ mais $-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite, donc f' n'admet pas de limite en 0.

Théorème B.29 : Limite de la dérivée

Si f est continue sur I et dérivable sur $I\setminus\{x_0\}$ et si $f'(x)$ admet une limite $\ell\in\mathbb{R}$ lorsque x tend vers x_0 alors f est dérivable en x_0, $f'(x_0)=\ell$ et f' est continue en x_0.

Le théorème précédent montre que si f' admet une limite finie en x_0 alors f est dérivable en x_0. De plus, comme $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$, la fonction f' est continue en x_0 (donc f de classe $\mathscr{C}^1$). Cependant, si une telle limite n'existe pas ou n'est pas finie, on ne peut pas conclure que f n'est pas dérivable en x_0 (cf. exemple 2). Le théorème est une condition suffisante, pas nécessaire !

IV | Formules de Taylor et développements limités

A – Généralités

Définition B.30

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 et on note $f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathrm{o}(g(x))$ si $f(x)=\varepsilon(x)g(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$.

Si la fonction g ne s'annule pas une infinité de fois au voisinage de x_0, cela revient à dire que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$.

En revenant à la définition, on montre que $\mathrm{o}(x^n)=\mathrm{o}(\lambda x^n)$ pour $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}$. Ainsi, on préférera écrire $\mathrm{o}(x^3)$ plutôt que $\mathrm{o}(5x^3)$.

Proposition B.31 : Lien entre ∼ et o

$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x)+\mathrm{o}(g(x))$.

Démonstration

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x)+\mathrm{o}(g(x)) \Longleftrightarrow f(x)-g(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathrm{o}(g(x)) \Longleftrightarrow \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$
$$\Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 1 \Longleftrightarrow f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$$

On peut ainsi retrouver tous les équivalents classiques en 0.

Exemple

$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)$ donc $1-\cos(x)=\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)$, ce qui prouve que $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.
On remarquera qu'on a utilisé ici $\mathrm{o}(x^2)=\mathrm{o}\left(\frac{x^2}{2}\right)$ même s'il n'est pas utile de le préciser sur une copie.

Ne pas confondre $f = o(g)$ et $f = O(g)$ qui signifie que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de x_0.

Définition B.32 : Développement limité

On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Lorsque le développement limité d'une fonction en un point existe, il est unique. Ceci nous permet d'*identifier* les coefficients de deux développements limités.

Exemple

Montrons que $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$. Donc $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

Il ne reste plus qu'à montrer que $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$ ce qui est le cas car $\dfrac{x^{n+1}}{1-x}\dfrac{1}{x^n} = \dfrac{x}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Théorème B.33 : Formules de Taylor

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $a, b \in I$.

- Formule de Taylor avec reste intégral

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$$

- Inégalité de Taylor-Lagrange

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M \frac{(b-a)^n}{n!} \qquad \text{avec } M = \sup_{[a,b]} |f^{(n)}|$$

- Formule de Taylor-Young

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((b-a)^n)$$

D'après la formule de Taylor-Young, toute fonction de classe $\mathscr{C}^n$ admet un développement limité à l'ordre n, les coefficients du développement limité sont les coefficients de Taylor. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant !

Exemple

$f : x \mapsto x^3 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas deux fois dérivables et pourtant, $f(x) = o(x^2)$.

Exercice 15

Retrouver les résultats suivants à l'aide de la formule de Taylor-Young.

- $\displaystyle \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\displaystyle \cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
- $\displaystyle \sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- De même, en dérivant k fois $(1+x)^\alpha$,

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)\\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

Valeurs particulières : $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.
Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, les termes sont nuls à partir d'un certain rang. Est-ce normal ?

B – Opérations sur les développements limités

Par souci de simplicité, les calculs de développements limités évoqués ici se font au voisinage de 0 mais il faut garder en tête que si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$$

Proposition B.34 : Somme de DL

On suppose que $f(x) = P(x) + \mathrm{o}(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + \mathrm{o}(x^n)$ avec $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
Alors $(f + g)(x) = P(x) + Q(x) + \mathrm{o}(x^n)$.

Proposition B.35 : Produit de DL

On suppose que $f(x) = P(x) + \mathrm{o}(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + \mathrm{o}(x^n)$ avec $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
En notant R le polynôme correspondant aux termes de degré au plus n du produit PQ, on a :

$$(fg)(x) = R(x) + \mathrm{o}(x^n).$$

Il en va de même pour la composée de deux fonctions. Le développement limité est obtenu en extrayant les termes de degré au plus n du polynôme $P \circ Q$.
Pour calculer le développement limité d'un quotient, on cherchera à faire apparaître après simplification une expression du type $\dfrac{f}{1 \pm u}$ avec $u(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, que l'on verra comme un produit de deux fonctions.

Exercice 16

Quel est le développement limité à l'ordre 2 en 0 de :

$$x \longmapsto \frac{\cos x}{1 - x}; \quad x \longmapsto \sqrt{1 + \sin x}; \quad x \longmapsto \frac{1}{\mathrm{e}^x + \cos x}\ ?$$

- $\star$ $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$ et $\dfrac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \mathrm{o}(x^2)$ Donc,

$$\frac{\cos x}{1 - x} \underset{x \to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right)\left(1 + x + x^2 + \mathrm{o}(x^2)\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$$

En développant, on n'a conservé que les termes de degré $\leqslant 2$.

- $\star$ Comme $\sqrt{1 + u} \underset{u \to 0}{=} 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \mathrm{o}(u)$ et que $\sin(x) = x + \mathrm{o}(x^2)$, en posant $u = \sin(x)$,

$$\sqrt{1 + \sin(x)} \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}(x^2)$$

- $\star$ Tout d'abord, $\mathrm{e}^x + \cos(x) \underset{x \to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \mathrm{o}(x^2)\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2} \mathrm{o}(x^2)\right) = 2 + x + \mathrm{o}(x^2)$. Ainsi,

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x + \cos x} = \frac{1}{2 + x + \mathrm{o}(x^2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right)}$$

Comme $\dfrac{x}{2} + \mathrm{o}(x^2) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, on peut alors utiliser le fait que $\dfrac{1}{1 + u} \underset{u \to 0}{=} 1 - u + u^2 + \mathrm{o}(u^2)$ pour obtenir :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x + \cos x} \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}(x^2)$$

Proposition B.36 : Intégration terme à terme d'un DL

On suppose qu'au voisinage de 0, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \mathrm{o}(x^n)$. On note F une primitive de f.

F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0 et on a :

$$F(x)=F(0)+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\mathrm{o}(x^{n+1})$$

Ne pas oublier de rajouter la constante $F(0)$ ou de manière générale $F(x_0)$ en intégrant terme à terme sinon le résultat est incorrect.

Exercice 17

Déterminer le développement limité à l'ordre n en 0 de $\ln(1+x)$ et $\arctan x$.

Posons $f(x)=\ln(1+x)$. On a $f'(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\mathrm{o}(x^{n-1})$.
Et donc en intégrant terme à terme,

$$\ln(1+x)=\underbrace{f(0)}_{=0}+x-\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\mathrm{o}(x^n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k+\mathrm{o}(x^n).$$

Exercice 18

Déterminer le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de $\arctan x$. Posons $g(x)=\arctan(x)$. On trouve :

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=1-x^2+x^4+\ldots+(-1)^nx^{2n}+\mathrm{o}(x^{2n})$$

Et donc en intégrant terme à terme,

$$\arctan(x)\underset{x\to0}{=}\underbrace{g(0)}_{=0}+x-\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{o}(x^{2n+1})=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+\mathrm{o}(x^{2n+1}).$$

Exercice 19

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan x$.

tan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Elle admet donc un $DL_3(0)$.
Comme elle est de plus impaire, $\tan x=ax+bx^3+\mathrm{o}(x^3)$. Enfin, $\tan'=1+\tan^2$ donc on trouve :

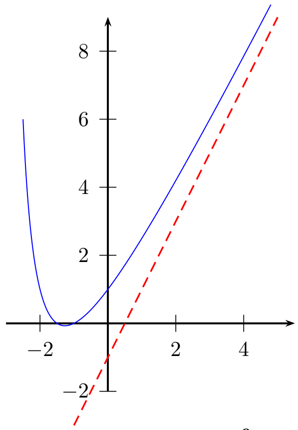
$$\tan'(x)\underset{x\to0}{=}a+3bx^2+\mathrm{o}(x^2)=1+a^2x^2+\mathrm{o}(x^2)\underset{x\to0}{=}1+\tan^2(x)$$

Par identification, on trouve $a=1$ et $b=\frac{1}{3}$ donc $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)$.

Les développements limités permettent entre autres de calculer des limites, de rechercher des équivalents et d'étudier localement des fonctions.

Exercice 20

Soit $f:x\mapsto\frac{2x^2+5x+3}{x+3}$. Étudier les branches infinies de la courbe représentative de f.



Représentation de $x\mapsto\frac{2x^2+5x+3}{x+3}$

En effectuant un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$ à l'aide d'une division euclidienne, on trouve :

$$f(x)=\frac{2x^2+5x+3}{x+3}=\frac{(x+3)(2x-1)+6}{x+3}\underset{x\to+\infty}{=}2x-1+\underbrace{\frac{6}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}$$

On en déduit que la droite d'équation $y=2x-1$ est asymptote à la courbe représentative de f. En effet, $f(x)-(2x-1)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. De plus, au voisinage de $+\infty$, la courbe sera au-dessus de son asymptote car :

$$f(x)-(2x-1)=\frac{6}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right),\text{ c'est-à-dire } f(x)-(2x-1)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{6}{x}>0$$

On pourra faire la comparaison avec la technique consistant à calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-2x$

Attention, un développement limité, tout comme un équivalent, permet d'étudier le comportement local[2] d'une fonction au voisinage d'un point. Dans l'exemple précédent, pour obtenir la position relative de la courbe par rapport à son asymptote dans le plan entier et pas seulement au voisinage de $+\infty$, il est nécessaire d'étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de la quantité $f(x)-(2x-1)$.

C – Synthèse des développements limités usuels à connaître

$DL_n(0)$	$\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\mathrm{o}(x^n)$	$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\mathrm{o}(x^n)$
$DL_{2n}(0)$	$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\mathrm{o}(x^{2n})$	$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{o}(x^{2n})$
$DL_{2n+1}(0)$	$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$	$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$
$DL_{2n}(0)$	$\mathrm{ch}x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\mathrm{o}(x^{2n})$	$\mathrm{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{o}(x^{2n})$
$DL_{2n+1}(0)$	$\mathrm{sh}x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$	$\mathrm{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$
$DL_n(0)$	$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+\mathrm{o}(x^n)$	$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\mathrm{o}(x^n)$
$DL_n(0)$	$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+\mathrm{o}(x^n)$	$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\mathrm{o}(x^n)$
$DL_n(0)$	$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+\mathrm{o}(x^n)$	$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\mathrm{o}(x^n)$
$DL_n(0)$	$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\mathrm{o}(x^n)$	$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\mathrm{o}(x^n)$
$DL_2(0)$		$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\mathrm{o}(x^2)$
$DL_4(0)$		$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^4)$

V | Intégration sur un segment

A – Définitions et propriétés

Définition B.37

⋆ Une fonction f est dite en escalier sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $(a_0,\ldots,a_n)$ de $[a,b]$ et n réels $\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1}$ tels que :

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!]\quad \forall x\in]a_k,a_{k+1}[\quad f(x)=\lambda_k.$$

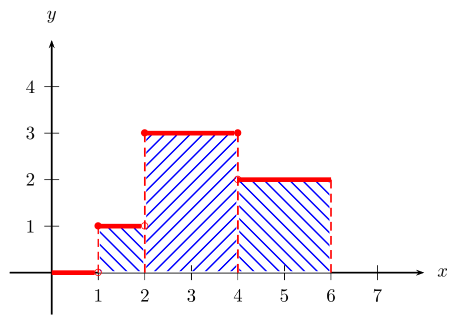
⋆ On appelle intégrale de f le réel $\displaystyle\int_a^b f=\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\lambda_k$, indépendant de la subdivision choisie.

Exemple

On considère la fonction f définie sur le segment $[0,6]$ par :

$$f(x)=0 \text{ si } 0\leqslant x<1$$
$$f(x)=1 \text{ si } 1\leqslant x<2$$
$$f(x)=3 \text{ si } 2\leqslant x\leqslant 4$$
$$f(x)=2 \text{ si } 4<x\leqslant 6$$

f est en escalier et $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x=0+1+6+4=11.$



Représentation d'une fonction en escalier

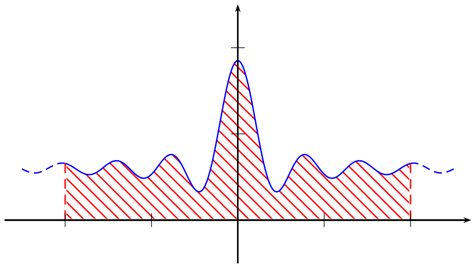
2. Vous l'aurez peut-être compris, c'est la grande différence entre la formule de Taylor-Young et de Taylor avec reste intégral. Cette dernière est bien plus intéressante !

Ainsi définie, l'intégrale de f correspond à l'aire *algébrique* du domaine situé entre la courbe et l'axe des abscisses. On généralise, non sans mal, la notion d'intégrale à toute fonction continue sur le segment $[a, b]$ en approchant de telles fonctions par des fonctions en escalier. Nous ne reviendrons pas sur ce résultat.

Théorème B.38

Une fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment.

Ce théorème fondamental est trop souvent méconnu des candidats. Avant tout calcul d'intégrale, on cherchera à montrer l'existence de celle-ci en justifiant la continuité de la fonction considérée sur le segment d'intégration.



L'interprétation en termes d'aire reste identique dans le cas d'une fonction continue

On remarquera que $\displaystyle\int_a^b f$ ne dépend pas des valeurs que prend la fonction f en a et b. Plus généralement, si deux fonctions prennent les mêmes valeurs sauf en un nombre fini de points, les intégrales sont identiques.

Quelques propriétés de l'intégrale :

Si f et g sont continues sur $[a, b]$, $c \in [a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

- Linéarité : $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$
- Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$
- Positivité : $\displaystyle f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f \geqslant 0.$
- Croissance : $\displaystyle f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$
- Inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$

Attention, on a supposé $a < b$. Si f est positive et $b < a$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

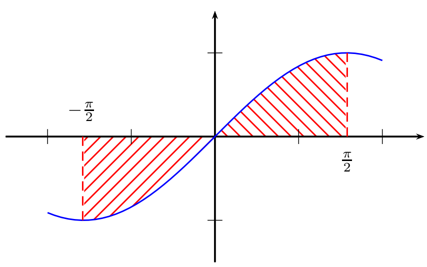
On essaiera d'interpréter toutes ces propriétés graphiquement.

Théorème B.39

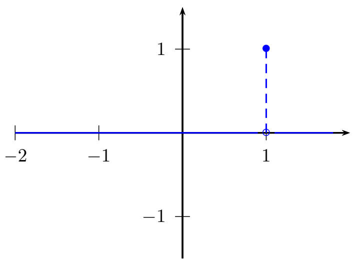
Soit f une fonction *positive* et *continue* sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f = 0 \Longleftrightarrow f \text{ est identiquement nulle sur } [a, b].$$

Chaque hypothèse de ce théorème est indispensable comme le montre les deux exemples suivants :



EXEMPLE 1 : $f : x \mapsto \sin(x)$



EXEMPLE 2 : $g : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$

On a bien $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_{-2}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ bien qu'aucune des fonctions f et g ne soit nulle.

B – Primitives

Définition B.40 : Primitive

On appelle primitive d'une fonction continue f sur un intervalle I, toute fonction F dérivable sur I vérifiant $F' = f$, c'est-à-dire :
$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

Proposition B.41

Toutes les primitives d'une fonction sur un intervalle sont égales à une constante près.

Démonstration

Soient F et G deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I.
Comme $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$, la fonction $F - G$ est constante sur *l'intervalle* I et $F = G + \lambda$. ■

Il suffit donc de connaître une primitive d'une fonction f pour toutes les avoir. Cette proposition montre également que si une fonction f admet une primitive, alors il en existe une infinité. On parlera donc d'*une* primitive de f, et jamais de *la* primitive de f.

Il est maintenant temps de faire le lien entre deux notions *a priori* complètement distinctes : l'intégrale d'une fonction sur un segment que l'on a interprétée comme une aire et la notion de primitive.

Théorème B.42 : Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et $a \in I$.

(i) $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

(ii) Si G est une primitive de f sur I, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = G(x) - G(a)$.

L'assertion (i) montre que toute fonction continue admet une primitive sur un intervalle donné alors que l'assertion (ii) montre que l'on peut calculer une intégrale à l'aide d'une primitive.

Démonstration (non exigible)

Considérons la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

- ⋆ Remarquons que cette fonction est bien définie sur I puisque pour $x \in I$, la fonction f étant continue sur le segment $[a, x]$ (ou $[x, a]$), l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.
- ⋆ Montrons que cette fonction F est dérivable et que $F' = f$.
  Pour cela considérons $x_0 \in I$ et montrons que $\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue, il existe $\alpha > 0$ tel que :
  $$\forall x \in I \quad |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
  Donc pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\}$,
  $$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x-x_0}\cdot\left[\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right] - f(x_0)\right| \\ &= \left|\frac{1}{x-x_0}\cdot\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0)\right| \quad \text{(relation de Chasles)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| &= \frac{1}{|x-x_0|}\cdot\left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{1}{|x-x_0|}\cdot\left|\int_{x_0}^{x} (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{|x-x_0|}\cdot\displaystyle\int_{x_0}^{x} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t \text{ si } x>x_0 \\ \dfrac{-1}{|x-x_0|}\cdot\displaystyle\int_{x_0}^{x} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t \text{ si } x<x_0 \end{cases} \qquad \text{(inégalité de la moyenne)} \\
&\leqslant \frac{1}{x-x_0}\cdot\int_{x_0}^{x}\varepsilon\,\mathrm{d}t=\frac{x-x_0}{x-x_0}\cdot\varepsilon=\varepsilon \qquad \text{car } t\in\,]x_0-\alpha,x_0+\alpha[
\end{aligned}$$

L'inégalité précédente étant vraie quel que soit $\varepsilon>0$, F est bien dérivable et $F'(x_0)=f(x_0)$.

⋆ Remarquons ensuite que $F(a)=\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$.

⋆ Soit G est une primitive de f sur I. D'après ce qui précède, F et G sont égales à une constantes près :

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}\quad\forall x\in I\qquad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=G(x)+\lambda$$

En évaluant l'égalité en a, on trouve $\lambda=-G(a)$. Ainsi,

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\Big[G(t)\Big]_{t=a}^{t=x}=G(x)-G(a)$$

■

Exercice 21

De quelle fonction $x\longmapsto\displaystyle\int_x^{3x}\exp(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle la primitive ?

Remarquons d'abord que $g:x\longmapsto\displaystyle\int_x^{3x}\exp(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $f:t\longmapsto\exp(t)\sin(t)$ est continue sur tout segment de la forme $[x,3x]$ donc intégrable. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$g(x)=\int_0^{3x}\exp(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{x}\exp(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t=F(3x)-F(x)$$

où F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, et même l'unique primitive de f qui s'annule en 0 d'après le théorème précédent.
Ainsi, g est dérivable comme somme de fonctions dérivables et on a :

$$g'(x)=3f(3x)-f(x)=3\exp(3x)\sin(3x)-\exp(x)\sin(x)$$

On aurait pu également calculer directement l'intégrale avant de dériver mais c'est inutilement compliqué.

C – Recherche de primitives et calcul d'intégrales

Avant de calculer une primitive, on commence par justifier son existence en précisant que la fonction est continue sur l'intervalle considéré. Il existe de nombreuses façons de calculer des primitives. Voici trois méthodes fondamentales, d'autres techniques seront vues en séance de travaux dirigés.

1 – Reconnaissance de formes usuelles

La méthode la plus simple à mettre en œuvre, à vous d'avoir l'œil !

Fonction	Primitive (à une constante près)
$f'\cdot f$	$\dfrac{f^2}{2}$
$f'f^\alpha \quad (\alpha\neq -1)$	$\dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert$
$f'\cdot\exp(f)$	$\exp(f)$
$f'\cdot\sin(f)$	$-\cos(f)$
$\dfrac{f'}{1+f^2}$	$\arctan(f)$

Exercice 221

Calculer $I=\displaystyle\int_1^3 3x\mathrm{e}^{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

I existe car la fonction $x\mapsto 3x\mathrm{e}^{x^2+1}$ est continue sur le segment $[1,3]$. De plus,

$$I=\int_1^3 3x\mathrm{e}^{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_1^3 2x\mathrm{e}^{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\Big[\mathrm{e}^{x^2+1}\Big]_1^3=\frac{3}{2}(\mathrm{e}^{10}-\mathrm{e}^2)$$

On vérifie au passage que I est un nombre positif, comme attendu : on intégrait une fonction positive sur le segment $[1,3]$.

Exercice 232

Déterminer une primitive de tan sur un intervalle à préciser.

La fonction tan est continue sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc admet une primitive sur cet intervalle. De plus, $\tan=\dfrac{\sin}{\cos}$ donc tan est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u=\cos$. Ainsi, les primitives de tan sont les fonctions $x\mapsto -\ln\lvert\cos(x)\rvert$.

2 – Intégration par parties

Théorème B.43

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t=\Big[f(t)g(t)\Big]_{t=a}^{t=b}-\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Tout d'abord, les fonctions f et g étant de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction $(fg)'$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc intégrable. De plus, comme $(fg)'=f'g+fg'$,

$$\begin{aligned}\int_a^b (fg)'(t)\,\mathrm{d}t&=\Big[f(t)g(t)\Big]_{t=a}^{t=b}\quad\text{(par intégration directe)}\\&=\int_a^b (f'(t)g(t)+f(t)g'(t))\,\mathrm{d}t=\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

■

Exemples

Déterminer une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ et de arctan sur $\mathbb{R}$.

Les deux fonctions considérées sont continues sur respectivement $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$, elles admettent donc des primitives sur chacun de ces intervalles. De plus, les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$, on peut appliquer une intégration par parties :

- ⋆ Pour tout $x>0$,

$$\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t \underset{\substack{f'(t)=1\\ g(t)=\ln(t)}}{=} \Big[t\ln(t)\Big]_1^x-\int_1^x \mathrm{d}t=x\ln(x)-x+1$$

Donc $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln.

⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t \underset{\substack{f'(t)=1\\ g(t)=\arctan(t)}}{=} \Big[t\arctan(t)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= x\arctan(x) - \Big[\ln|1+t^2|\Big]_0^x = x\arctan(x) + \ln\big(1+x^2\big)$$

Donc $x \mapsto x\arctan(x) + \ln\big(1+x^2\big)$ est une primitive de arctan.

3 – Changement de variable

Théorème B.44

Si $f : J \to \mathbb{R}$ est continue et $\varphi : [a,b] \to J$ de classe $\mathscr{C}^1$ alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Démonstration

Tout d'abord, les fonctions f et $f\circ\varphi\times\varphi'$ sont continues sur le segment $[a,b]$ donc intégrables. De plus, en notant F une primitive de f, $(F\circ\varphi)' = \varphi'\times(f\circ\varphi)$. Ainsi,

$$\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b (F\circ\varphi)'(u)\,\mathrm{d}u = \Big[F(\varphi(u))\Big]_{u=a}^{u=b} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \Big[F(t)\Big]_{t=\varphi(a)}^{t=\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

■

Exercice 241

Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc intégrable. En posant $x = \sin(t)$, changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{\mathrm{d}x=\cos(t)\,\mathrm{d}t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme $\cos(t) \geqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 252

Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\tan x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+\tan x)}{\cos^2 x}$ est continue sur le segment $[0,\pi/4]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas; elle y est donc intégrable. Posons alors $u = 1+\tan(x)$, changement de variables de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle considéré. Comme $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)}$,

$$J = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\tan x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u = \Big[u\ln(u) - u\Big]_1^2 = 2\ln(2) - 1.$$

N'oubliez pas de changer les bornes de l'intégrale lors d'un changement de variable !

Corollaire B.45

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$

(i) Si f est paire, $\displaystyle\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.

(ii) Si f est impaire, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 0$.

(iii) Si f est T-périodique, $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f = \int_a^b f$.

Avant toute démonstration, il est nécessaire de visualiser ces propriétés à l'aide d'une petite illustration [3].

Démonstration

La fonction f étant continue sur $[-a, a]$, $[a, b]$ et $[a+T, b+T]$, les quatres intégrales sont bien définies.

(i) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \underset{u=-t}{=} -\int_a^0 f(-u)\,\mathrm{d}u + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \underset{f \text{ paire}}{=} \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$

(ii) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \underset{u=-t}{=} -\int_a^0 f(-u)\,\mathrm{d}u + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \underset{f \text{ impaire}}{=} -\int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

(iii) $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u+T)\,\mathrm{d}u \underset{f \text{ périodique}}{=} \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ en posant $u = t - T$.

■

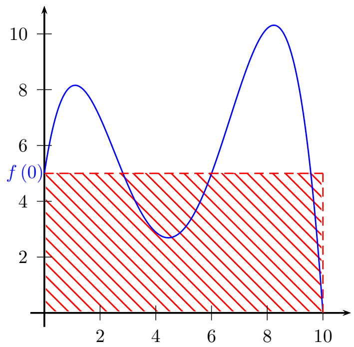
D – Calcul approché d'intégrales

On suppose $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. Il n'est pas toujours possible de calculer explicitement $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et on cherche ici à développer une méthode permettant d'en calculer une valeur approchée.

1 – Approximation par une fonction constante

Une première idée consiste à approcher f par la valeur qu'elle prend en un point de l'intervalle $[a, b]$, par exemple $f(a)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b f(a)\,\mathrm{d}x = f(a)(b-a)$$



L'aire sous la courbe est approchée par l'aire d'un rectangle avec $a = 0$ et $b = 10$

On voit bien que l'approximation est relativement grossière mais comment majorer l'erreur commise ?

$$\left| \underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{valeur exacte}} - \underbrace{\int_a^b f(a)\,\mathrm{d}x}_{\text{valeur approchée}} \right| = \left| \int_a^b (f(x) - f(a))\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b \left| f(x) - f(a) \right|\,\mathrm{d}x \quad \text{car } a \leqslant b$$

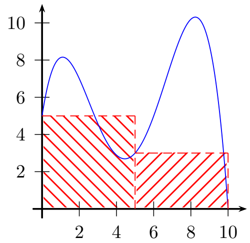
Comme f' est continue sur $[a, b]$, $|f'|$ est majorée par $M \in \mathbb{R}$ (toute fonction continue sur un segment est bornée). Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(a)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b \left| f(x) - f(a) \right|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M|x-a|\,\mathrm{d}x = M\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2}(b-a)^2$$

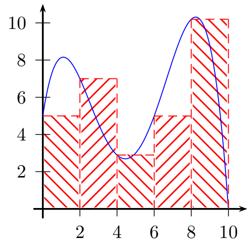
3. À vos crayons !

2 – Méthode des rectangles

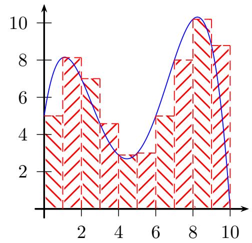
Pour obtenir une meilleure approximation, on peut découper le segment $[a, b]$ en n sous-segments et approcher f par une constante sur chacun de ces intervalles comme le montrent les figures suivantes.



Approximation pour $n = 2$



Approximation pour $n = 5$



Approximation pour $n = 10$

Intuitivement, pour n *très* grand, la valeur obtenue sera *proche* de la valeur exacte. Il reste à justifier ce résultat !

Le segment $[a, b]$ est de longueur $b-a$. Si on le découpe en n sous-segment de même longueur, ces sous-segments seront de longueur $\frac{b-a}{n}$. Le premier sous-segment sera $\left[a, a+\frac{b-a}{n}\right]$, le deuxième $\left[a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n}\right]$ et ainsi de suite... Ils seront plus généralement de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ avec $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. On remarquera d'ailleurs que $x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$. Sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$, on approche f par $f(x_i)$. L'aire du rectangle obtenu est alors $f(x_i) \times \frac{b-a}{n}$ selon la formule bien connue « hauteur × longueur ».

L'aire totale, c'est-à-dire la somme des aires des n rectangles vaut alors :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)\,\mathrm{d}t$$

Quelle est l'erreur d'approximation commise ? Pour majorer cette erreur, on va sommer les erreurs d'approximation pour chacun des rectangles, c'est-à-dire :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M}{2}(x_{i+1}-x_i)^2 = \frac{M}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2,$$

comme nous l'avons vu au paragraphe précédent. De plus, comme $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)\,\mathrm{d}t\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{M}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{M}{2}\frac{(b-a)^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

On vient donc de montrer que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Cette méthode, dite des rectangles, converge en $\dfrac{1}{n}$.
Le résultat est encore vrai pour f simplement continue (et pas seulement de classe $\mathscr{C}^1$). (admis)

Théorème B.46 : Sommes de Riemann

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ (et même seulement continue) sur $[a, b]$. Alors,

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $a = 0$ et $b = 1$, on trouve :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 26

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}$.

$\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f:x\mapsto\frac{1}{1+x}$. Comme f est continue, d'après le théorème des sommes de Riemann,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\Big[\ln|1+x|\Big]_0^1=\ln(2)$$

VI | Équations différentielles

A – Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante et l'équation homogène associée :

$$\begin{aligned} &a(t)y'+b(t)y=c(t) \quad (E)\\ &a(t)y'+b(t)y=0 \quad\quad (H)\end{aligned}$$

Elle est dite résolue lorsqu'elle est sous la forme $y'+b(t)y=c(t)$.
On suppose que $a,b,c:I\to\mathbb{R}$ sont continues sur un *intervalle* I de $\mathbb{R}$.

Théorème B.47 : Problème de Cauchy

Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(t)y'+b(t)y=c(t)\\ y(t_0)=y_0\end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

En particulier, toute solution d'une équation de la forme $y'(t)+b(t)y(t)=0$ qui s'annule une fois sur un intervalle donné y est automatiquement entièrement nulle !

Théorème B.48 : ÉD linéaire d'ordre 1

- L'équation homogène $y'+f(t)y=0$ admet pour solution générale $t\mapsto\lambda\mathrm{e}^{-F(t)}$ où F est une primitive de f sur I et $\lambda\in\mathbb{R}$.
- L'équation $y'+f(t)y=b(t)$ admet pour solution générale $t\mapsto y_0(t)+\lambda\mathrm{e}^{-F(t)}$ où y_0 est une solution particulière de l'équation avec second membre.

Méthode pour retrouver la formule rapidement (à prendre avec des pincettes !)

$$y'=-f(t)y \iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-f(t)y \iff \frac{\mathrm{d}y}{y}=-f(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc, en intégrant chaque membre de l'égalité,

$$\ln y(t)=-F(t)+k,\quad k\in\mathbb{R}$$

et on trouve :

$$y(t)=\lambda\mathrm{e}^{-F(t)}\quad\text{avec } \lambda=\mathrm{e}^{k}$$

Corollaire B.49 : Structure de l'ensemble des solutions

Lorsque $a:I\to\mathbb{R}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I, l'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de (H) est une droite vectorielle.

En effet, d'après ce qui précède et en conservant les mêmes notations,

$$\mathscr{S}_H=\mathrm{Vect}\left(t\mapsto\mathrm{e}^{-F(t)}\right)\text{ et }\mathscr{S}_E=y_0+\mathrm{Vect}\left(t\mapsto\mathrm{e}^{-F(t)}\right)$$

Exercice 27

Datation au carbone 14
La matière radioactive perd par unité de temps une proportion constante k de sa masse ce qui conduit à l'équation $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t) = -km(t)$. Sachant que la période[4] du carbone 14 est de 5500 ans et qu'on a retrouvé des ossements d'origine humaine ne contenant que $0,002\%$ de la proportion habituelle, de quand datent les ossements ?

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre, on se ramènera toujours au plan de résolution suivant :

❶ Identification de l'équation.
❷ Mise sous forme résolue en divisant par $a(t)$ sur les intervalles où a ne s'annule pas.
Ex. : $ty' - t^2y + \sin t = 0$. On résoudra l'équation $y' - ty + \frac{\sin t}{t} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
❸ Résolution de l'équation homogène : $y' = f(t)y$ avec f continue sur l'intervalle de résolution I.
La solution générale de l'équation homogène est $y(t) = \lambda e^{F(t)}$ où F est une primitive de f sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}(t \mapsto e^{F(t)})$.
❹ Résolution de l'équation avec second membre.
On recherche pour cela une solution particulière y_0 de (E).
S'il n'y a pas de solution évidente, on utilisera la méthode de la variation de la constante en cherchant y sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{F(t)}$. En réinjectant y dans l'équation, on obtient une expression de λ' que l'on peut généralement intégrer.
La solution générale de l'équation (E) est $y(t) = \lambda e^{F(t)} + y_0(t)$. On a $\mathscr{S}_E = y_0 + \mathscr{S}_H$.
Ex. : Résoudre $y' - xy = x$ en cherchant une solution particulière de deux façons différentes.
❺ Raccordement éventuel des solutions.
Ex. : $y' + a(x)y = b(x)$ avec y_1 solution sur $\mathbb{R}_-^*$ et y_2 solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $y \mapsto \begin{cases} y_1(x) \text{ si } x < 0 \\ y_2(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$ est solution de l'équation sur $\mathbb{R}_*$.
Elle est solution sur $\mathbb{R}$ si son prolongement par continuité est également dérivable, ce qui nous conduit à deux conditions :

$$\lim_{x\to0^-} y_1(x) = \lim_{x\to0^-} y(x) = \lim_{x\to0^+} y(x) = \lim_{x\to0^+} y_2(x)$$
$$\lim_{x\to0^-} y_1'(x) = \lim_{x\to0^-} y'(x) = \lim_{x\to0^+} y'(x) = \lim_{x\to0^+} y_2'(x)$$

❻ Conditions initiales.

Exercice 28

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $ty' + |t|y = t^2e^{-|t|}$.

- On trouve en résolvant l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + C_1\right)e^t \text{ si } t < 0 \quad \text{et} \quad y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + C_2\right)e^{-t} \text{ si } t > 0$$

- Si y est solution sur $\mathbb{R}$ alors elle l'est en particulier sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$ donc il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ telles que :

$$y(t) = \begin{cases} \left(\frac{t^2}{2} + C_1\right)e^t \text{ si } t < 0 \\ \left(\frac{t^2}{2} + C_2\right)e^{-t} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

Par ailleurs, y doit être continue en 0 donc on a $C_1 = C_2$. La dérivabilité de y en 0 implique par ailleurs que $C_1 = -C_2$.
Il y a donc une seule solution sur $\mathbb{R}$, donnée par $y(t) = \frac{t^2}{2}e^t$ si $t < 0$, $y(t) = \frac{t^2}{2}e^{-t}$ si $t \geqslant 0$.

B – Équations différentielles linéaires d'ordre 2

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante et l'équation homogène associée :

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \quad (E)$$
$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \quad (H)$$

De telles équations apparaissent souvent en physique.

Exemple

Pendule simple : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.
Pour des oscillations faibles, $\sin\theta \approx \theta$, on « peut » considérer que θ vérifie l'équation $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$.

Exemple

Circuit RLC : $\dfrac{q}{C}+R\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+L\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}=U(t)$.

On suppose que $a,b,c,d : I \to \mathbb{R}$ sont continues sur un *intervalle* I de $\mathbb{R}$.

Théorème B.50 : Problème de Cauchy

Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(t)y''+b(t)y'+c(t)y=d(t) \\ y(t_0)=y_0\,;\ y'(t_0)=y'_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

On ne s'intéresse dans ce chapitre qu'à la résolution de cette équation pour des coefficients constants.
On écrit (E) désormais sous la forme :

$$a\,y''+b\,y'+c\,y=d(t) \quad (E)$$

Le résultat suivant est démontré dans la partie **??**.

Théorème B.51 : Équa. diff. linéaire d'ordre 2 homogène à coeff. constants

On considère l'équation $a\,y''+b\,y'+c\,y=0$.
On résout l'équation caractéristique $aX^2+bX+c=0$ de discriminant associé Δ.

- Si $\Delta>0$, deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. $y(t)=\lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 t}+\lambda_2\mathrm{e}^{r_2 t}$ avec $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$.
- Si $\Delta=0$, une racine réelle double r. $y(t)=(\lambda_1+\lambda_2 t)\mathrm{e}^{rt}$ avec $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$.
- Si $\Delta<0$, deux racines complexes conjuguées $\alpha\pm i\beta$.
  $y(t)=(\lambda_1\cos(\beta t)+\lambda_2\sin(\beta t))\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$.

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1, l'ensemble des solutions de l'équation $a(t)y''+b(t)y'+c(t)y=d(t)$ est obtenu en recherchant une solution particulière de cette équation.

Théorème B.52 : Structure de l'ensemble des solutions

Lorsque $a : I\to\mathbb{R}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I, l'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de (H) est un plan vectoriel.
Toute solution de (E) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Exercice 29

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y''+3y'+2y=0\,;\quad y''-2y'+y=0\,;\quad y''-2y'+5y=0$$

On peut déterminer une solution particulière de (E) lorsque le second membre $d(t)$ est de la forme :

- $d(t)=P(t)$ avec P un polynôme de degré n. On cherche alors une solution sous la forme d'un polynôme Q de même degré que P.
  Ex. : $y''-2y'+y=t^2$.
- $d(t)=P(t)\mathrm{e}^{mt}$ avec $P\in\mathbb{R}[X]$, on cherche y_0 sous la forme $y_0(t)=Q(t)\mathrm{e}^{mt}$ avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ et $\deg(Q)=\deg(P)+k$, k étant l'ordre de multiplicité de m en tant que racine de l'équation caractéristique.
- $d(t)=\cos(\omega t),\sin(\omega t)$, on passe en complexe et on retrouve le cas précédent[5].

Exercice 30

Résoudre l'équation différentielle $y''(x)+y(x)=\cos(x)\,(*)$.

- On résout tout d'abord l'équation homogène, en reconnaissant l'équation de l'oscillateur harmonique.
  Les solutions sont de la forme $y(x)=A\cos(x)+B\sin(x)$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.
- Cherchons une solution particulière, en commençant tout d'abord par écrire l'équation sous forme complexe :

$$y''(x)+y(x)=\mathrm{e}^{ix}=P(x)\mathrm{e}^{mx}$$

avec $P(x)=1$ et $m=i$. Comme i est racine simple de l'équation caractéristique $X^2+1=0$, on cherche une solution particulière sous la

5. Si $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, $y_0(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$.

forme $y(x) = \lambda x e^{ix}$. En injectant dans l'équation, on trouve alors $\lambda = -\frac{i}{2}$.

Il n'y a alors plus qu'à extraire la partie réelle de $y(x) = -\frac{i}{2} x e^{ix}$ pour obtenir une solution particulière de l'équation initiale.

On trouve $y_p(x) = \frac{1}{2} x \sin(x)$.

- Les solutions de l'équation $(*)$ sont donc de la forme $y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + \frac{x}{2}\sin(x)$.

Proposition B.53 : Principe de superposition

Si y_1 est solution de l'équation $a y'' + b y' + c y = d_1(t)$ et y_2 de l'équation $a y'' + b y' + c y = d_2(t)$ alors $y_1 + y_2$ est solution de l'équation $a y'' + b y' + c y = d_1(t) + d_2(t)$.

Le plan de résolution est exactement le même que celui décrit pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Lorsque l'équation n'est pas à coefficients constants, nous verrons un peu plus tard dans l'année différentes techniques nous permettant de résoudre une telle équation.