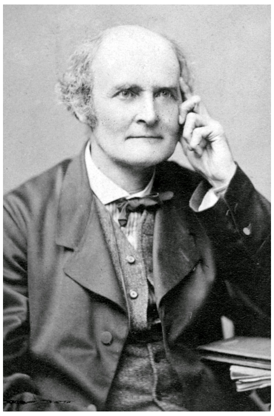
1 Compléments d'algèbre linéaire

« The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful ; the ideas, like the colours or the words must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test : there is no permanent place in this world for ugly mathematics. »
G.H. Hardy (1941)

Plan de cours

► Quelques éléments historiques

La théorie de l'algèbre linéaire naît de la résolution des systèmes d'équations linéaires. Les mathématiciens se sont intéressés pendant de nombreux siècles à la seule résolution des systèmes à coefficients numériques. La méthode du pivot (ou *algorithme de Gauss-Jordan*) est alors efficacement employée. On en trouve même la trace en Chine, probablement un siècle ou deux avant notre ère, sous le nom d'*algorithme Fang-Cheng*, qui signifie littéralement *le modèle rectangulaire*. Les premiers résultats concernant le calcul explicite des solutions d'un système $n \times n$ pour $n \in \{2, 3\}$ en fonction de ses coefficients sont énoncés par Maclaurin en 1748, puis généralisés pour un entier n quelconque quelques années plus tard par Cramer ; il présente alors les formules qui portent aujourd'hui son nom.



Arthur Cayley

L'utilisation des déterminants et des matrices s'étend par la suite à l'ensemble de la communauté mathématique. Sylvester introduit pour la première fois le terme de *matrice*, matrices que Cayley étudie de son côté comme des entités propres dans son traité de 1858 *A Memoir on the Theory of Matrices*. Les mathématiciens manipulaient cependant depuis un certain temps les tableaux de nombres (citons par exemple les travaux de Gauß à ce sujet).

L'algèbre linéaire, en tant que telle, ne prend son essort qu'aux alentours de 1840, moment à partir duquel les mathématiciens commencent à s'intéresser à l'étude de propriétés communes (à travers la linéarité) applicables à toute sorte d'objets. Grassman cherche de son côté à poser les bases d'un calcul véritablement géométrique débarrassé des choix de coordonnées : les espaces vectoriels voient enfin le jour. Les travaux en dimension supérieure à trois font cependant apparaître quelques résistances de la part de ceux qui considèrent que tout objet mathématique doit avoir une interprétation dans le monde sensible. Une fois dégagés de cette contrainte, les mathématiciens ont pu développer puis généraliser des résultats en dimension quelconque. Il n'en reste pas moins que le langage géométrique a irrigué l'algèbre linéaire, les termes *vecteurs* et *hyperplans* en sont de bons exemples. C'est finalement Peano qui propose en 1888 une définition axiomatisée des espaces vectoriels, peu différente de celle qui est aujourd'hui adoptée.

I | Espaces vectoriels

A – Espaces vectoriels

Nous ne reviendrons pas ici sur la définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les différents points de cette définition permettent d'effectuer des opérations sur les vecteurs analogues à celles qu'on effectue plus habituellement dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (somme de vecteurs, multiplication d'un vecteur par un scalaire).

Exemples

Quelques exemples classiques d'espaces vectoriels (munis des lois usuelles) :

- $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ et plus généralement $\mathbb{K}^n$;
- $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille $n \times p$;
- $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- l'ensemble des suites à valeurs réelles ou complexes (que l'on pourrait noter $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ ou bien $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$).

Il s'agit de résultats classiques du cours qui peuvent être réutilisés sans démonstration le jour du concours.

B – Sous-espaces vectoriels

E désigne dans toute la suite du chapitre un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1.1 : Sous-espace vectoriel

Soit F un sous-ensemble (ou partie) de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$;
- $\forall x, y \in F \quad x + y \in F$;
- $\forall x \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda x \in F$.

On vérifie qu'un sous-espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel. Ce résultat est très pratique : pour montrer qu'un ensemble possède une structure d'espace vectoriel, il suffit de prouver qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel déjà connu. On se ramènera notamment aux exemples fondamentaux présentés précédemment. On peut même avoir plus simplement recours à la caractérisation suivante :

Théorème 1.2 : Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- $0_E \in F$;
- $\forall x, y \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda x + y \in F$. (*stabilité par combinaison linéaire*)

S'en suit toute une série d'exemples qu'il convient de maîtriser parfaitement.

Exemple 1

$\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 2

$\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

- la fonction nulle est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$;
- si $f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exemple 3

$\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n, est un espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$:

- le polynôme nul est de degré au plus n ;
- si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme $\lambda P + Q$ est bien de degré au plus n. Donc $\lambda P + Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 4

$\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices symétriques de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- la matrice nulle est symétrique ;
- soit $M, N \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Comme M et N sont symétriques, $(\lambda M + N)^T = \lambda M^T + N^T = \lambda M + N$. Donc $\lambda M + N \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$.

On montre de même que $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel [1].

Exemple 5

L'ensemble des suites convergentes à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs réelles :

- la suite nulle converge (vers 0) ;
- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ', λ un réel, alors la suite $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers $\lambda\ell + \ell'$). Il y a bien stabilité par combinaison linéaire.

Exemple 6

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

- le vecteur nul appartient bien à F car $0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$;
- si $u(x, y, z)$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u + v \in F$. En effet, $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$ et :

$$(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') - 3(\lambda z + z') = \lambda(x + 2y - 3z) + (x' + 2y' - 3z') = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$$

Exemple 7

$G = \{(x + y, x - y, 2y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

- Pour $x = y = 0$, $(x + y, x - y, 2y) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in G$.
- Soit $u, v \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Il existe $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ tels que $u = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2y \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x'+y' \\ x'-y' \\ 2y' \end{pmatrix}$.

$$\lambda u + v = \lambda \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y' \\ x'-y' \\ 2y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda x + x') + (\lambda y + y') \\ (\lambda x + x') - (\lambda y + y') \\ 2(\lambda y + y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''+y'' \\ x''-y'' \\ 2y'' \end{pmatrix}$$

  avec $x'' = \lambda x + x'$ et $y'' = \lambda y + y'$. Donc on a bien montré que $\lambda u + v \in G$.

Proposition 1.3 : Intersection de deux sous-espaces vectoriels

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

1. À vos crayons !

Démonstration

Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- $0_E \in F$ et $0_E \in G$ car F et G sont deux sous-espaces vectoriels (s.e.v.) de E. Donc $0_E \in F \cap G$.
- Soit $x, y \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  $\lambda x + y \in F$ car F est un s.e.v. de E. De même, $\lambda x + y \in G$ car G est un s.e.v. de E. Donc $\lambda x + y \in F \cap G$.

■

Il n'en va pas de même pour l'union. En général, $F \cup G$ n'est pas un espace vectoriel.

C – Familles quelconques de vecteurs

1 – Familles finies de vecteurs

Commençons par rappeler quelques définitions et propriétés fondamentales vues en première année sur les familles finies de vecteurs.

Définition 1.4

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.
On note $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \dots, u_n$, c'est-à-dire :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Théorème 1.5

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est un espace vectoriel.

En pratique, il suffit d'écrire $F = \text{Vect}(\cdots)$ pour justifier que F est un sous-espace vectoriel. Utile, non ?

Définition 1.6 : Famille génératrice

Une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de E est dite génératrice si tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_n$. Autrement dit,

$$\forall x \in E \quad \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i.$$

On dit alors que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ engendre E et on a $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.
$\hookrightarrow$ Existence de la décomposition.

Attention, il existe plusieurs familles génératrices distinctes. Elles peuvent ne pas avoir le même cardinal !

Proposition 1.7 : Propriétés des familles génératrices

Soit $u_1, \dots, u_n \in E$. On pose $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. On ne change pas l'espace vectoriel engendré F si :

(i) on permute plusieurs vecteurs dans la famille $(u_1, \dots, u_n)$.

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n)$$

(ii) on ajoute à la famille un vecteur combinaison linéaire des $u_1, \dots, u_n$.

(iii) on multiplie l'un des vecteurs par un scalaire non nul.

(iv) on retranche à la famille un vecteur combinaison linéaire des autres.

Proposition 1.8

Toute famille de vecteurs de E qui contient une famille génératrice de E est génératrice de E.

Définition 1.9 : Famille libre

Une famille $(u_1,\dots,u_n)$ de E est dite libre si

$$\lambda_1 u_1+\cdots+\lambda_n u_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i=0_E \Longrightarrow \lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$$

On dit alors que les vecteurs $u_1,\dots,u_n$ sont linéairement indépendants.
Une famille non libre est dite liée.

Proposition 1.10

- Une famille est liée dès qu'elle contient le vecteur nul.
- Une famille composée d'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur n'est pas nul.
- Une famille composée de deux vecteurs est libre si et seulement s'ils ne sont pas colinéaires.

La dernière propriété est fausse dès qu'il y a plus de deux vecteurs. Il faudrait vérifier que chaque vecteur n'est pas combinaison des autres pour prouver que la famille est libre, ce qu'on ne fait pas en pratique.

Théorème 1.11 : Caractérisation des familles liées

La famille $(u_1,\dots,u_n)$ est liée si et seulement si (au moins) un des vecteurs est combinaison linéaire des $n-1$ autres.

Théorème 1.12 : Caractérisation des familles libres

La famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre si et seulement si :

$$\forall x\in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)\quad \exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\quad x=\lambda_1 u_1+\cdots+\lambda_n u_n$$

$\hookrightarrow$ Unicité de la décomposition.

Proposition 1.13

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute famille contenant une famille liée est liée.

Pour les familles de polynômes échelonnées en degré (c'est-à-dire que les degrés sont deux à deux distincts), on dispose d'une propriété relativement utile en pratique.

Proposition 1.14

Une famille de polynômes *non nuls* échelonnée en degré est libre.

Démonstration

Procédons par récurrence sur le nombre n de polynômes de la famille.

- *Initialisation*
  Si P_1 est non nul, la famille (P_1) qui ne contient qu'un seul vecteur est libre.
- *Hérédité*
  Considérons une famille $(P_1, \dots, P_n, P_{n+1})$ une famille de polynômes non nuls échelonnés en degré. On peut sans perte de généralité supposer que les polynômes sont ordonnés dans le sens des puissantes croissantes. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n + \lambda_{n+1} P_{n+1} = 0$$

Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, $P_{n+1} = -\frac{1}{\lambda_{n+1}}(\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n)$, ce qui est absurde pour une question de degré.
D'où $\lambda_{n+1} = 0$ et :

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$$

Comme par hypothèse de récurrence, la famille $(P_1, \dots, P_n)$ est échelonnée en degré, elle est libre.
Ce qui conduit à $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Donc $(P_1, \dots, P_n, P_{n+1})$ est libre.

Ceci achève la démonstration par récurrence. ■

Exemple

On prouve ainsi sans aucun calcul que la famille $(X+1, X^3 - 3X^2 + 1, X^5 + 6X^2, X^4 - 3)$ est libre.

Définition 1.15 : Base

Une base d'un espace vectoriel E est une famille libre et génératrice.

Théorème 1.16 : Caractérisation d'une base

$(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E ssi

$$\forall x \in E \quad \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

$\hookrightarrow$ Existence et unicité de la décomposition

Définition 1.17 : Espace vectoriel de dimension finie

Un espace vectoriel de dimension finie est un espace qui admet une famille génératrice finie, c'est-à-dire qui contient un nombre fini de vecteurs.

Théorème 1.18 : Théorème de la base extraite

Soit E un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie $\mathscr{F}$. Alors $\mathscr{F}$ contient une sous-famille qui est une base de E.

Un espace de dimension finie admet donc une base finie.

Si on connaît une famille génératrice de E, on peut toujours enlever des vecteurs combinaisons linéaires des autres jusqu'à obtenir une famille libre donc une base de E.

Théorème 1.19 : Dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont même cardinal.
On appelle dimension de E ce cardinal et on le note $\dim E$.

À retenir : pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, il suffit d'exhiber une base de cet espace et de compter le nombre de vecteurs obtenus.

Par convention, $\dim(\{0_E\}) = 0$.

Définition 1.20

On appelle droite vectorielle un espace de dimension 1, plan vectoriel un espace de dimension 2.

Théorème 1.21

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille génératrice de E.
Alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geqslant n$, et si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n$, c'est une base de E.

Dans la pratique, ce résultat a une importance capitale : il suffit qu'une famille soit génératrice et comporte autant de vecteurs que la dimension de E pour que celle-ci soit une base de E.
Attention, ce n'est pas parce qu'une famille contient plus de $n = \dim(E)$ vecteurs qu'elle est génératrice ! Par exemple, $(X, 2X, 3X)$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$ car le polynôme constant 1 ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des trois vecteurs précédents.

Voici maintenant l'équivalent du théorème de la base extraite pour les familles libres :

Théorème 1.22 : Théorème de la base incomplète

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille libre de E.
On peut compléter $\mathscr{F}$ en une base de E.

Théorème 1.23

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille libre de E.
Alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leqslant n$, et si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n$, c'est une base de E.

Si on connaît une famille libre d'un espace vectoriel E qui contient $n = \dim(E)$ vecteurs, c'est une base !

Théorème 1.24 : Dimension d'un s.e.v.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, E de dimension finie.
Alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

Pour montrer que deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont égaux, il suffit donc de prouver que $F \subset E$ puis que $\dim(F) = \dim(E)$. La double inclusion ne sera alors pas nécessaire.

Proposition 1.25

Soient F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors, $F \times G = \{(x, y) \mid x \in F, y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E et $\dim(F \times G) = \dim(F) \times \dim(G)$.

2 – Extension au cas des familles quelconques ($\star$)

On ne se limite désormais plus au cas des familles finies de vecteurs. Soit I un ensemble d'indices non nécessairement fini. On peut par exemple prendre $I = [\![1, 7]\!]$, $I = \mathbb{N}$, $I = \mathbb{R}$, etc. On considère alors une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs de E indexée par I et on pose $\mathscr{F} = (u_i)_{i \in I}$.

Exemples

Quelques exemples simples de familles infinies de vecteurs :

- $(x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille infinie (dénombrable) de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- $(x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x})_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est une famille infinie (non dénombrable) de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille infinie de $\mathbb{R}[X]$.

On appelle combinaison linéaire de la famille $\mathscr{F}$ tout vecteur de la forme $\sum_{j\in J}\lambda_j u_j$ où J est une partie finie de I. On ne manipule donc que des sommes finies ! Comme dans le cas d'une famille finie, on note $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{F}$. C'est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(u_i)_{i\in I}$, c'est même le plus petit[2] sous-espace vectoriel de E contenant les éléments de $\mathscr{F}$.

Définition 1.26 : Familles libres, génératrices et bases

- $\mathscr{F}$ est dite libre si toute sous-famille finie de $\mathscr{F}$ est libre.

$$\forall J\subset I,\ J \text{ finie},\ \sum_{j\in J}\lambda_j u_j = 0_E \Longrightarrow \forall j\in J,\ \lambda_j = 0$$

- $\mathscr{F}$ est dite génératrice si tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$.

$$\forall u\in E,\ \exists J\subset I,\ J \text{ finie},\ u=\sum_{j\in J}\lambda_j u_j \text{ avec } \lambda_j\in\mathbb{R}$$

- $\mathscr{F}$ est une base de E si elle est libre et génératrice.

Proposition 1.27 : Famille de polynômes échelonnée en degré

Toute famille (quelconque) de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre.

Démonstration

Il suffit de montrer que toute sous-famille finie d'une telle famille est libre, ce qui a déjà été fait. ■

Corollaire 1.28

La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$ par définition même de $\mathbb{K}[X]$ et la liberté découle du résultat précédent. ■

On peut plus généralement prouver la propriété suivante.

Proposition 1.29

Toute famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\deg(P_k)=k$ pour tout k est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

La famille (P_k) constituée de polynômes non nuls ($\deg(P_k)\neq-\infty$) est échelonnée en degré ; elle est libre. Reste cependant à montrer qu'elle est génératrice.
Considérons pour cela un polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$ et posons $n=\deg(P)$. La famille $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ puisqu'elle est libre et contient $n+1=\dim(\mathbb{K}_n[X])$ éléments. Comme $P\in\mathbb{K}_n[X]$, il s'écrit bien comme combinaison linéaire des polynômes $P_0,\dots,P_n$ et donc plus généralement comme une combinaison linéaire de la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$. ■

D – Représentation matricielle et changement de base

On considère un espace vectoriel E de dimension finie n et une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E.
Soit x un vecteur de E. Il existe alors un unique n-uplet $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$.

2. au sens de l'inclusion

Définition 1.30

Les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont alors appelés coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$. On peut alors choisir de représenter x par la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ce qu'on pourrait qualifier de « vecteur coordonnées » dépend donc de la base choisie.

On peut de même représenter une famille de vecteurs $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathscr{B}$ par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{p1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{1n} & \dots & u_{pn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

où u_{ij} représente la j^{e} coordonnée du vecteur u_i dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire que l'on a :

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} e_j$$

La matrice dépend là aussi de la base choisie.

On considère plus généralement deux bases $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ d'un espace vectoriel de dimension finie E et on cherche à déterminer un lien entre les coordonnées d'un même vecteur dans les base $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

Définition 1.31

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E.
On appelle matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, et on note $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont les vecteurs colonnes représentent les coordonnées des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$, soit :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \end{array} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \qquad \text{où } e'_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} e_j \text{ pour tout } k \in [\![1, n]\!]$$

Théorème 1.32 : Inversibilité d'une matrice de passage

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E.
La matrice de passage $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Théorème 1.33 : Formule de passage

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E.
Soit $x \in E$. On pose $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$. On a $X = PX'$ avec $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$.

Comme P est inversible, on trouve $X' = P^{-1}X$. Pour ne pas confondre P et P^{-1}, on se souviendra que pour obtenir les coordonnées X' dans la nouvelle base en fonction des coordonnées X dans l'ancienne base, il est nécessaire d'inverser un système, donc d'inverser une matrice.

Définition 1.34 : Rang

Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une une famille de vecteurs de E. On appelle rang de $\mathscr{F}$ la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{F}$, c'est-à-dire $\dim \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. On le note $\operatorname{rg}(u_1, \dots, u_p)$.

Exemples

Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque.

- Si $u \in E$ est non nul, $\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Vect}(u)) = 1$.
- Si $u, v \in E$ sont non colinéaires, $\operatorname{rg}(u, v) = \dim(\operatorname{Vect}(u, v)) = 2$.
- Si $u, v \in E$ sont colinéaires et non nuls, $\operatorname{rg}(u, v) = \dim(\operatorname{Vect}(u, v)) = 1$.

Proposition 1.35

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

(i) $\operatorname{rg}(u_1, \dots, u_p) \leqslant p$;

(ii) $\operatorname{rg}(u_1, \dots, u_p) \leqslant n$;

(iii) $\operatorname{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$ si et seulement si la famille est libre ;

(iv) $\operatorname{rg}(u_1, \dots, u_p) = n$ si et seulement si la famille est génératrice de E.

Corollaire 1.36

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n.
La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $\operatorname{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$.

Théorème 1.37

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie n, admettant pour base la famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Alors, le rang de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est égal au rang de la matrice représentative des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire :

$$\operatorname{rg}(u_1, \dots, u_p) = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_p))$$

Ce théorème fournit deux informations :

- Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, il suffit de calculer le rang d'une matrice.
- Si l'on change de base, le rang de la matrice obtenue est invariant. Autant choisir une base simple !

Exemple

Montrons que la famille $\mathscr{F} = (1 + 2X + 3X^2, 2 + X + 3X^2, 3 + 2X + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour cela, montrons que $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ en écrivant la matrice M représentative de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rg}(M) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix} = 3$$

Théorème 1.38

Soit E un espace vectoriel de dimension n avec $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E.
On considère la matrice représentative M de la famille $(u_1,\dots,u_n)$ dans une base quelconque de E.

$$(u_1,\dots,u_n) \text{ est une base de } E \iff \det(M)\neq 0$$

Dans ce cas, la matrice M est inversible.

Attention, le déterminant n'a de sens que lorsqu'on manipule une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n. Sinon, la matrice n'est pas carrée (et la famille ne peut être une base de E). On peut néanmoins déterminer son rang.

Exemple

Reprenons l'exemple de la famille $\mathscr{F}=(1+2X+3X^2, 2+X+3X^2, 3+2X+X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Il suffit en fait de calculer le déterminant de la matrice M, matrice représentative de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, pour montrer qu'il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&2\\3&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=-5+14+3=12\neq 0$$

E – Somme de sous-espaces vectoriels

1 – Cas de deux sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition 1.39 : Somme de deux sous-espaces

On appelle somme de F et G l'ensemble noté $F+G$ défini par :

$$F+G=\{x_1+x_2 \mid x_1\in F, x_2\in G\}$$

Cela signifie que pour tout $x\in F+G$, il existe $x_1\in F$ et $x_2\in G$ tels que $x=x_1+x_2$.
La décomposition n'est pas nécessairement unique !

Proposition 1.40

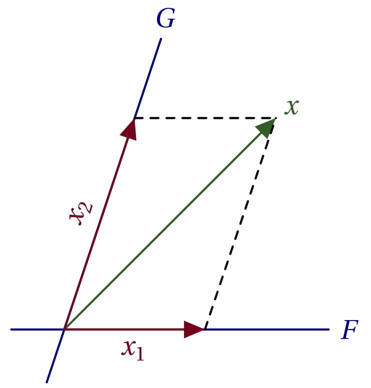
$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F et G.

Définition 1.41 : Somme directe

On dit que la somme de F et de G est directe lorsque la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est unique. On la note alors $F\oplus G$.

Autrement dit, si $x\in F\oplus G$ alors il existe un unique couple $(x_1,x_2)\in F\times G$ tel que $x=x_1+x_2$.

Chaque vecteur se décompose de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.



Proposition 1.42 : Caractérisation d'une somme directe

F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Définition 1.43 : Espaces supplémentaires

On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
On note alors $E = F \oplus G$. Cela revient à dire que :

$$\forall x \in E \quad \exists!(x_1, x_2) \in F \times G \quad x = x_1 + x_2$$

On dit également que G est un supplémentaire de F dans E. Attention, un supplémentaire n'est pas unique !

Cependant, le théorème suivant permet de s'assurer de l'existence d'au moins un supplémentaire (tout du moins en dimension finie).

Théorème 1.44 : Existence d'un supplémentaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F possède (au moins) un supplémentaire dans E.

Lorsque E est de dimension finie, on a souvent recours à la caractérisation suivante qui s'appuie sur la formule de Grassman.

Lemme 1.45 : Formule de Grassman

$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Théorème 1.46 : Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie

Si E est un espace de dimension finie, F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si deux des trois propositions suivantes sont vérifiées (la troisième étant automatiquement vraie) :

$$\text{(i) } E = F + G \quad \text{(ii) } F \cap G = \{0_E\} \quad \text{(iii) } \dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

Tout supplémentaire de F a donc , en dimension finie, pour dimension $\dim(E) - \dim(F)$.

Exercice 1

On considère les deux espaces vectoriels :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y + t = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}\right\}; \quad G = \left\{\lambda(1,1,2,0) + \mu(2,0,1,1) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Déterminer une base de F et trouver un système d'équations vérifiées par les éléments de G.
F et G sont -ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 2

$E = \mathbb{R}_4[X]$ et $F = \{P \in E \mid P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$.
Montrer que F est un espace vectoriel, déterminer une base de F et préciser sa dimension.
Montrer que $G = \mathrm{Vect}(1, X, 1 + X + X^2)$ est un supplémentaire de F dans E.

Exercice 3

Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$. Préciser les dimensions de ces espaces.

Théorème 1.47 : Base adaptée

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E de bases respectives $(e_1, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Alors, $E = F \oplus G$ si et seulement si la famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E. Dans ce cas, la famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est qualifiée de *base adaptée*.

On peut ainsi montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en montrant que la concaténation de deux bases est encore une base (mais de l'espace tout entier cette fois !).

2 – Cas d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels (⋆)

Soit E un espace vectoriel de dim. quelconque. On considère p sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de E.

Définition 1.48 : Somme de p sous-espaces

On appelle somme de $F_1, \dots, F_p$ l'ensemble noté $F_1 + \dots + F_p$ ou bien $\sum_{i=1}^{p} F_i$ défini par :

$$F_1 + \dots + F_p = \{x_1 + \dots + x_p \mid (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p\}$$

Définition 1.49 : Somme directe

Les espaces $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe lorsque la décomposition de tout vecteur de $F_1 + \dots + F_p$ comme somme de vecteurs des sous-espaces F_i est unique. On la note alors $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ ou bien $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

Proposition 1.50 : Caractérisation de la somme directe

Les sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe si et seulement si la décomposition du vecteur nul comme somme de vecteurs des sous-espaces F_i est unique.

Démonstration

Le sens direct est immédiat, par définition d'une somme directe. Reste à montrer que l'unicité de la décomposition du vecteur nul implique l'unicité de la décomposition de n'importe quel vecteur. Supposons que $x_1 + \dots + x_p = x_1' + \dots + x_p'$ avec $x_i, x_i' \in F_i$. On a alors :

$$(x_1 - x_1') + \dots + (x_i - x_i') + \dots + (x_p - x_p') = 0_E$$

L'unicité de la décomposition du vecteur nul conduit à $x_i - x_i' = 0_E$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, i.e. $x_i = x_i'$. ■

Il existe d'autres caractérisations, notamment en dimension finie, mais elles sont hors programme.

Exercice 4

On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues sur $[-1; 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et les sous-espaces vectoriels de E suivants :

- F l'ensemble des fonctions constantes de E ;
- G l'ensemble des fonctions nulles sur $[-1, 0]$;
- H l'ensemble des fonctions nulles sur $[0, 1]$.

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Théorème 1.51 : Base adaptée

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ alors la famille obtenue par concaténation de bases des espaces $F_1, \dots, F_p$ est une base de E, appelée base adaptée à la décomposition en somme directe.

Exercice 5

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \operatorname{Ker}(f + 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ puis écrire la matrice représentative de f dans une base adaptée à cette somme directe.

II | Applications linéaires

A – Définitions et premières propriétés

Définition 1.52

On dit que f est une application linéaire de E dans F si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemple 1

Montrons que l'application $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, -x, 2y) \end{array} \right.$ est linéaire.

Soit $u(x, y), u'(x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme $\lambda u + u' = (\lambda x + x', \lambda y + y')$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + u') &= ((\lambda x + x') + 2(\lambda y + y'), -(\lambda x + x'), 2(\lambda y + y')) \\ &= \lambda(x + 2y, -x, 2y) + (x' + 2y', -x' + 2y') = \lambda f(u) + f(u') \end{aligned}$$

Exemple 2

Montrons que l'application φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = X^2 P' - P$ est linéaire.

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(\lambda P + Q) = X^2(\lambda P + Q)' - (\lambda P + Q) = \lambda(X^2 P' - P) + (X^2 Q' - Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$

Proposition 1.53

Si $f : E \to F$ est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$.

Démonstration

Supposons que $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E) = 2f(0_E)$. Donc $f(0_E) = 0_F$. ■

Cette propriété nous permet de montrer qu'une application n'est pas linéaire.

Exemple

L'application φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,y)=(x+2y+1,x-y)$ n'est pas linéaire.
En effet, $\varphi(0,0)=(1,0)\neq(0,0)$.

Proposition 1.54

Soit $f,g:E\to F$ deux applications linéaires. Alors,

- $\lambda f+g$ et $g\circ f$ sont linéaires.
- Si f est de plus bijective alors f^{-1} est également linéaire.

On remarquera que si $f:E\to F$, $f^{-1}:F\to E$ donc $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_E$ alors que $f\circ f^{-1}=\mathrm{Id}_F$.

Proposition 1.55

L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ muni des lois $+$ et $\cdot$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Nous admettons le résultat suivant.

Proposition 1.56

Si E et F sont de dimension finie, $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et

$$\dim(\mathscr{L}(E,F))=\dim E\times\dim F$$

Définition 1.57

- Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans lui-même.
  On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
- Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.
  On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
- Une forme linéaire est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple

L'application $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z)=x+2y-z$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$.

- f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- f est linéaire car pour tous $u(x,y,z)$, $u'(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda u+u')=(\lambda x+x')+2(\lambda y+y')-(\lambda z+z')=\lambda(x+2y-z)+(x'+2y'-z')=\lambda f(u)+f(u')$$

$\mathrm{GL}(E)$ n'est pas un espace vectoriel.

B – Noyau et image d'une application linéaire

Dans toute cette partie, on considère $f\in\mathscr{L}(E,F)$.

1 – Noyau et injectivité

Définition 1.58

On appelle noyau de f et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

Attention, si A est un ensemble, la notation $f^{-1}(A)$ ne signifie pas que f est bijective ! $f^{-1}(A)$ désigne l'ensemble des antécédents des éléments de A par f. Autrement dit, $f^{-1}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\}$.
On retiendra que :

$$x \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x) = 0_F$$

Théorème 1.59

$\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Montrons que $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E.

- ⋆ Tout d'abord, $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$.
  En effet, nous avons montré que $f(0_E) = 0_F$.
- ⋆ Soient $x, y \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda 0_F + 0_F = 0_F$ donc $\lambda x + y \in \mathrm{Ker}(f)$. ■

Attention, 0_E n'est pas toujours le seul antécédent de 0_F, on se méfiera fortement de l'implication souvent fausse : $f(x) = 0_F \Longrightarrow x = 0_E$. Cette propriété est vraie lorsque l'application est injective. Et dans le cas d'une application linéaire, il suffit réciproquement que cette propriété soit vérifiée pour que l'application soit injective. En d'autres termes, on a la théorème suivant :

Théorème 1.60

L'application linéaire f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

Démonstration

Démontrons ce résultat par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f injective, c'est-à-dire que : $\forall (x,y) \in E^2 \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Montrons que $x = 0_E$.
Comme $f(x) = 0_F$ et $f(0_E) = 0_F$, on a $f(x) = f(0_E)$ et par injectivité, $x = 0_E$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons maintenant que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
Montrons que f est injective et considérons pour cela $x, y \in E$ quelconques.

$$f(x) = f(y) \iff f(x) - f(y) = 0_E \underset{f \in \mathscr{L}(E,F)}{\iff} f(x-y) = 0_E \iff x - y \in \mathrm{Ker}(f)$$

Comme $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, $x - y = 0_E$, c'est-à-dire $x = y$.

■

Exemple 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (2x - y, y + z, z - x)$. Étudions l'injectivité de f.
Déterminons pour cela son noyau.

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x,y,z) = (0,0,0) \iff (2x - y, y + z, z - x) = (0,0,0)$$

Ce qui conduit à la résolution suivante :

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ y+z=0 \\ z-x=0 \end{cases} \iff x=y=z=0$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et f est injective.
On laisse au lecteur le soin de montrer que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2

Éudions l'injectivité de l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP'-P$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

- ⋆ Vérifions pour commencer que φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$:
  - φ est linéaire : pour tout $P,Q\in\mathbb{R}_2[X]$ et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda P+Q)=X(\lambda P+Q)'-(\lambda P+Q)=\lambda(XP'-P)+(XQ'-Q)=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$$

  - φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$. En effet, on peut raisonner sur le degré ou bien effectuer le calcul suivant avec $P=aX^2+bX+c$:

$$\varphi(P)=X(2aX+b)-(aX^2+bX+c)=aX^2-c\in\mathbb{R}_2[X]$$

- ⋆ Déterminons le noyau de φ.

$$P=aX^2+bX+c\in\mathrm{Ker}(\varphi)\iff\varphi(X)=aX^2+c=0_{\mathbb{R}[X]}$$

  Or deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont mêmes coefficients. Donc par identification, $a=c=0$. Ainsi, $P=bX$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(\varphi)=\mathrm{Vect}(X)$. L'application n'est donc pas injective.

2 – Image, rang et surjectivité

Définition 1.61

On appelle image de f et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Im}(f)=f(E)=\{y\in F\mid\exists x\in E\ \ y=f(x)\}=\{f(x)\mid x\in E\}$$

Les trois écritures précédentes sont équivalentes. On retiendra que :

$$y\in\mathrm{Im}(f)\iff\exists x\in E\quad y=f(x)$$

Tout vecteur s'écrivant sous la forme $f(\cdots)$ appartient à l'image de f.

Théorème 1.62

$\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration

Montrons que $\mathrm{Im}\,f$ est un sous-espace vectoriel de F.

- ⋆ Comme $0_F=f(0_E)$, on a bien $0_F\in\mathrm{Im}(f)$.
- ⋆ De plus, si $x,y\in\mathrm{Im}(f)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, il existe $x',y'\in E$ tels que $x=f(x')$ et $y=f(y')$. D'où,

$$\lambda x+y=\lambda f(x')+f(y')=f(\lambda x'+y')\in\mathrm{Im}(f)$$

■

Le théorème suivant montre que l'on peut aisément obtenir une famille génératrice de l'image (en prenant l'image par f de vecteurs constituant une base de E). Il suffit alors de retirer les vecteurs combinaisons linéaires des autres afin d'obtenir une famille libre, donc une base.

Théorème 1.63

Soient E, F deux espaces vectoriels, E étant supposé de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n))$.

Démonstration

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Im}(f) &\iff \exists x \in E \quad y = f(x) \\ &\iff \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad y = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \\ &\iff \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad y = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) \end{aligned}$$

Donc on a bien $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n))$. ■

Définition 1.64

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E de dimension finie.
Alors $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension finie et on appelle rang de f, noté $\operatorname{rg}(f)$, la dimension de $\operatorname{Im}(f)$.

En effet, si E est de dimension finie, avec les notations précédente, $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n))$ donc $\operatorname{Im}(f)$ admet une famille génératrice finie et on a même $\dim(\operatorname{Im}(f)) \leqslant n$.

Théorème 1.65

L'application linéaire f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$.

Démonstration

Rappelons qu'une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent par f. Cela revient à dire que $f(E) = F$, soit $\operatorname{Im}(f) = F$. ■

Corollaire 1.66

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et E de dimension finie, alors f surjective si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \dim(F)$.

Démonstration

On a $\operatorname{Im}(f) \subset F$ et si $\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(F)$, l'égalité des dimensions nous donne alors $\operatorname{Im}(f) = F$.

Reprenons les deux exemples du paragraphe précédent pour voir si les applications étudiées sont surjectives.

Exemple 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (2x - y, y + z, z - x)$. Étudions la surjectivité de f.
Déterminons pour cela son image.
$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ avec (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On trouve :

$$f(e_1) = (2,0,-1); \quad f(e_2) = (-1,1,0); \quad f(e_3) = (0,1,1)$$

Cette dernière famille, qui engendre $\operatorname{Im}(f)$, est également libre : $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ (ou bien on revient à la définition d'une famille libre).
C'est donc une base de $\operatorname{Im}(f)$, qui est ainsi de dimension 3, et on a $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. f est donc surjective.

Exemple 2

Éudions la surjectivité de l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP' - P$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminons l'image de φ.
De la même façon que dans l'exemple précédent,

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)) = \mathrm{Vect}(-1, 0, X^2) = \mathrm{Vect}(1, X^2)$$

Cette dernière famille est bien libre (deux vecteurs non colinéaires), mais $\mathrm{Im}(\varphi) \neq \mathbb{R}_2[X]$ car $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ donc φ n'est pas surjective.

3 – Théorème du rang et bijectivité

Théorème 1.67 : Théorème du rang

On suppose que E est de *dimension finie* et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors,

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{=\mathrm{rg}(f)}$$

Démonstration

La démonstration n'est pas au programme mais se révèle très instructive.
On suppose que E est de dimension n. On a $\mathrm{Ker}\, f \subset E$.
Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}\, f$. Complétons-la en une base $(\underbrace{e_1, \ldots, e_p}_{p \text{ vecteurs}}, \underbrace{e_{p+1}, \ldots, e_n}_{n-p \text{ vecteurs}})$ de E.
Démontrons que $\mathrm{rg}\, f = n - p$ et montrons pour cela que $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$.

- $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_p), f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)) = \mathrm{Vect}(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$.
  La famille $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est donc génératrice.
- La famille est également libre. En effet, soit $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\lambda_{p+1} f(e_{p+1}) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F$$

  Alors, $f\left(\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F$ par linéarité, ce qui montre que $\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}\, f$.
  La famille $(e_1, \ldots, e_p)$ étant une base de $\mathrm{Ker}(f)$, il existe donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que :

$$\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i, \text{ soit } \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p - \lambda_{p+1} e_{p+1} - \cdots - \lambda_n e_n = 0_E$$

  La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ étant une base de E, elle est libre et dès lors, tous les λ_i sont nuls.
  En particulier, $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

Ainsi, $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension $n - p = n - \dim(\mathrm{Ker}(f))$. ■

On notera que dans le théorème du rang, seule la dimension de l'espace de départ intervient. Ce théorème n'a plus de sens lorsqu'il est de dimension infinie.

Corollaire 1.68

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.
E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit φ un isomorphisme entre les deux espaces E et F.
$\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im}(\varphi) = F$ donc d'après le théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) + \dim(\operatorname{Im}(\varphi)), \text{ soit } \dim(E) = 0 + \dim(F) = \dim(F)$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, si on suppose que $\dim(E) = \dim(F) = n$, on considère une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E (resp. $(f_1, \ldots, f_n)$ de F) et l'application $\varphi : E \to F$ définie par :

$$\varphi : x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \mapsto \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$$

- ⋆ L'application φ est linéaire.
- ⋆ L'application φ est injective : $\varphi(x) = 0_F \Longleftrightarrow \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0_F \Longleftrightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$ car la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre. Cela revient à dire que $x = 0_E$, mais encore que $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- ⋆ L'application φ est surjective : $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = n = \dim(F)$. Comme $\operatorname{Im}(F) \subset F$, on trouve $\operatorname{Im}(f) = F$. ■

Théorème 1.69

Soit f un *endomorphisme* de E, avec E de *dimension finie*. Alors,

$$f \text{ injective} \Longleftrightarrow f \text{ sujective} \Longleftrightarrow f \text{ bijective}$$

Démonstration

La preuve repose là encore sur le théorème du rang :

$$\begin{aligned} f \text{ injective } &\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} \Longleftrightarrow \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \dim(E) = \dim(\operatorname{Im}(f)) \Longleftrightarrow \operatorname{Im}(f) = E \Longleftrightarrow f \text{ surjective} \end{aligned}$$

L'hypothèse de dimension finie nous permet d'utiliser le théorème du rang, le fait que f soit un endomorphisme permet de justifier le fait que $\operatorname{Im}(f) \subset E$ et donc $\operatorname{Im}(f) = E$ par égalité des dimensions. ■

En dimension finie, un endomorphisme est bijectif dès qu'il est injectif ou surjectif! C'est une propriété importante des applications linéaires. On pourra se reporter aux exemples traités précédemment.

Il est souvent plus simple de prouver la bijectivité en justifiant l'injectivité de l'application et ce, en montrant que le noyau est réduit à $\{0_E\}$. Mais il n'y a pas de règle générale...

Théorème 1.70

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. f est un isomorphisme si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $f(\mathscr{B})$ soit une base de F.

Démonstration

On considère une application $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que f est un isomorphisme et considérons une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ quelconque de E.
f étant surjective, la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ engendre $F = \operatorname{Im}(f)$.
Cette famille comporte $n = \dim(E)$ vecteurs et comme $\dim(E) = \dim(F)$ (*cf.* corollaire précédent), on en déduit que cette famille génératrice est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Considérons une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ soit une base de F.

- $F = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \operatorname{Im}(f)$ donc f est surjective.

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

  Il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Ainsi,

  $$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \underset{\text{linéarité}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = 0_F$$

  Mais comme $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F, la famille est liibre.
  Ce qui montre que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Ainsi, $x = 0_E$ et on a bien $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, f est injective.

Au final, f est un isomorphisme de E vers F. ■

L'image de toute base par un isomorphisme est donc une base, et réciproquement.

4 – Résolution de l'équation $f(x) = y$

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = y$ avec $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $y \in F$.

⋆ Si $y \notin \mathrm{Im}(f)$, il n'y a aucune solution.

⋆ Si $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x_0 \in E$ tel que $y = f(x_0)$.
Le problème admet donc au moins une solution. De plus,

$$y = f(x) \Longleftrightarrow f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow f(x - x_0) = 0_F \Longleftrightarrow x - x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$$

Donc les solutions de l'équation sonc de la forme $x_0 + u$ avec $u \in \mathrm{Ker}(f)$, c'est-à-dire $f(u) = 0_F$.
Si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, il n'y a qu'une solution, x_0. Si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant 1$, il y en a une infinité.

On retrouve un résultat bien connu : dans un problème linéaire, les solutions s'écrivent comme la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène...

C – Représentation matricielle

On considère une application $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Dans toute cette partie, E et F sont supposés de dimension finie.

1 – Complément sur la trace d'une matrice (⋆)

Définition 1.71

On appelle trace d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on note $\mathrm{Tr}(M)$ la somme des coefficients diagonaux de M. Autrement dit, $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.

Exemple

Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{Tr}(M) = 1 + 5 + 9 = 15$.

Proposition 1.72

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Attention, les matrices AB et BA sont généralement différentes, même si elles ont la même trace.

Démonstration

On a $(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ donc $\mathrm{Tr}(AB)=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$ et $(BA)_{ij}=\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$ donc $\mathrm{Tr}(BA)=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki}$.
Les indices de sommation étant muets, on a $\mathrm{Tr}(BA)=\sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ik}b_{ki}$. De plus, les sommes considérées sont finies donc l'ordre de sommation n'importe pas. L'égalité est donc établie. ■

Exemple

Les deux matrices suivantes ont bien même trace (égale à 69) :

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&22\\43&50\end{pmatrix}\ ;\quad \begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23&34\\31&46\end{pmatrix}$$

Exercice 6

Déterminer la dimension de $H=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\mid \mathrm{Tr}(M)=0\}$.

2 – Représentation matricielle d'une application linéaire

Soient $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}'=(f_1,\dots,f_n)$ une base de F.

Soit $u\in E$ quelconque. Il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K}$ tels que $u=\sum_{j=1}^p\lambda_j e_j$. Par linéarité,

$$f(u)=f\left(\sum_{j=1}^p\lambda_j e_j\right)=\sum_{j=1}^p\lambda_j f(e_j)$$

Pour déterminer $f(u)$ à partir de u, il faut et il suffit de connaître l'image des vecteurs de la base $\mathscr{B}$ par f, c'est-à-dire de connaître les vecteurs $f(e_j)$. On vient simplement de montrer :

Théorème 1.73

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de E.

De plus, les vecteurs $f(e_j)$ sont des éléments de F. Ils peuvent donc s'écrire comme combinaisons linéaires des vecteurs f_i, à savoir :

$$\forall j\in[\![1,p]\!]\quad f(e_j)=\sum_{i=1}^n m_{i,j}f_i$$

Définition 1.74 : Matrice d'une application linéaire

On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ la matrice $(m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

On la note $\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B},\mathscr{B}')$ ou bien $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p)\end{matrix} \\ \begin{matrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Si $E=F$, on prend généralement $\mathscr{B}=\mathscr{B}'$ et on obtient la matrice carrée :

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} f(e_1) & \dots & f(e_n)\end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1\\ \vdots\\ e_n\end{matrix} & \begin{pmatrix} & & \\ \\ \\ \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Si $f=\mathrm{id}_E$ alors dans toute base $\mathscr{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=I_n$.

Exemple 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z)=(2x-y,y+z,z-x)$.
On note $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}'=(e_1',e_2',e_3')$ avec :

$$e_1'=(1,1,0),\ e_2'=(0,0,1),\ e_3'=(0,1,1)$$

Montrer que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f)$.

- ⋆ Tout d'abord, $\mathscr{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ car $\begin{vmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$.
- ⋆ $f(e_1)=(2,0,-1)=2e_1-e_3$, $f(e_2)=(-1,1,0)=-e_1+e_2$ et $f(e_3)=(0,1,1)=e_2+e_3$ donc :

$$\begin{array}{c} \\ e_1\\ e_2\\ e_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3)\end{array}\\ \begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\end{array}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

- ⋆ $f(e_1)=(2,0,-1)=2e_1'+e_2'-2e_3'$, $f(e_2)=(-1,1,0)=-e_1'-2e_2'+2e_3'$ et $f(e_3)=(0,1,1)=e_3'$ donc :

$$\begin{array}{c} \\ e_1'\\ e_2'\\ e_3'\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3)\end{array}\\ \begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-2&0\\-2&2&1\end{pmatrix}\end{array}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$$

  Pour déterminer les coordonnées du vecteur $f(e_1)$ dans la base $\mathscr{B}'$, on peut déterminer $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $f(e_1)=\alpha e_1'+\beta e_2'+\gamma e_3'$ à l'aide d'un système linéaire, ou bien effectuer les calculs de tête.
- ⋆ $f(e_1')=(1,1,-1)=e_1'-e_2'$, $f(e_2')=(0,1,1)=e_3'$ et $f(e_3')=(-1,2,1)=-e_1'-2e_2'+3e_3'$ donc :

$$\begin{array}{c} \\ e_1'\\ e_2'\\ e_3'\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} f(e_1') & f(e_2') & f(e_3')\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}\end{array}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$$

Pour s'entraîner, on déterminera $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$.

Exemple 2

Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de l'endomorphisme $\varphi : P\mapsto XP'-P$.
$\varphi(1)=-1$, $\varphi(X)=0$ et $\varphi(X^2)=X^2$ donc la matrice de φ dans la base canonique est :

$$\begin{array}{c} \\ 1\\ X\\ X^2\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2)\end{array}\\ \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

Pour s'entraîner, on écrira la matrice représentative de φ *dans la base* $(1+X, X^2+X, X^2+X+1)$ *en montrant préalablement qu'il s'agit bien d'une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

3 – Image d'un vecteur

Proposition 1.75

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
Soit $x\in E$ et $f\in\mathscr{L}(E,F)$. On pose $X=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $M=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(x))=MX$.

Exemple 1 (bis)

Reprenons l'exemple 1 du § précédent. $f(1,2,3)=(0,5,2)$ mais on peut également vérifier que :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nous avons choisi de travailler dans la base canonique $\mathscr{B}$, ce qui est de loin le plus simple. Mais tout fonctionne également dans la base $\mathscr{B}'$:
$(1,2,3)=e_1'+2e_2'+e_3'$ et,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Donc $f(1,2,3)=-3e_2'+5e_3'=(0,5,2)$.

Exemple 2 (bis)

Reprenons l'exemple 2 du § précédent. $\varphi(2X^2-3X+5)=2X^2-5$ mais on peut également vérifier que :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc on retrouve bien $\varphi(2X^2-3X+5)=2X^2-5$.

4 – Composition d'applications et produit matriciel

On suppose par la suite que f est un endomorphisme de E, ce qui revient à prendre $F=E$.

Proposition 1.76

On considère deux endomorphismes f et g de E et on note $\mathscr{B}$ une base de cet espace.

(i) $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f+g)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)+\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$;

(ii) $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f\circ g)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$;

(iii) f est bijective si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible. Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1})=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^{-1}$.

Voici un tableau de correspondance synthétisant les propriétés qui viennent d'être exposées :

Représentation vectorielle	Représentation matricielle
$x\in E$	$X\in\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$
$f\in\mathscr{L}(E)$	$M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
$f(x)\in E$	$MX\in\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$
$f+g\in\mathscr{L}(E)$	$M+N\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
$f\circ g\in\mathscr{L}(E)$	$MN\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
f^{-1}, $f\in\mathrm{GL}(E)$	M^{-1}, $M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

5 – Matrice de passage et changement de base dans le cas d'un endomorphisme

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $f\in\mathscr{L}(E)$. On rappelle que $P=P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ – ses colonnes représentent les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$$

La matrice P est inversible et P^{-1} représente la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

Théorème 1.77 : Formules de passage

(i) Soit $x \in E$. On note X (resp. X') le vecteur coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$).

$$X = PX' \quad \text{c'est-à-dire} \quad X' = P^{-1}X$$

(ii) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On note M (resp. M') la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$).

$$M' = P^{-1}MP$$

Démonstration

(ii) D'après ce qui précède, $f(x)$ a pour coordonnées MX dans la base $\mathscr{B}$ et $M'X'$ dans la base $\mathscr{B}'$. Ainsi, $M'X' = P^{-1}(MX)$, ce qui donne

$$M'P^{-1}X = P^{-1}MX$$

L'égalité précédente étant valable quel que soit le vecteur X, un résultat de première année montre que $M'P^{-1} = P^{-1}M$, c'est-à-dire que $M' = P^{-1}MP$.

■

N'oublions pas que pour déterminer X' en fonction de X, on doit inverser un système. D'où la présence de la matrice P^{-1} dans la formule $X' = P^{-1}X$.

Exemple 1 (ter)

Reprenons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (2x-y, y+z, z-x)$. Notons M sa matrice dana la base canonique et M' sa matrice dans la base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ où $e'_1 = (1,1,0)$, $e'_2 = (0,0,1)$, $e'_3 = (0,1,1)$.

On a $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Après calcul, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et :

$$M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ce qui était exactement ce que nous avions trouvé.

Définition 1.78 : Matrices semblables

Deux matrices M et M' sont dites semblables s'il existe une matrice P inversible telle que :

$$M' = P^{-1}MP$$

Toute matrice inversible pouvant s'interpréter comme une matrice de passage, deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. Elles vérifient donc, comme nous allons le constater, un certain nombre de propriétés communes.

Proposition 1.79

Deux matrices semblables ont même rang, même trace et même déterminant.

Démonstration

Considérons deux matrices $M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $M' = P^{-1}MP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(i) Le rang d'un endomorphisme étant égal au rang de sa matrice représentative dans n'importe quelle base, $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M')$.

(ii) $\mathrm{Tr}(M') = \mathrm{Tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{Tr}(P^{-1}(MP)) = \mathrm{Tr}((MP)P^{-1}) = \mathrm{Tr}(M)$ car $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$;

(iii) $\det(M') = \det(P^{-1}MP) = \det(P^{-1})\det(M)\det(P) = \dfrac{1}{\det(P)}\det(M)\det(P) = \det(M)$. ■

Le déterminant et la trace étant invariants par changement de base, on peut donner la définition suivante.

Définition 1.80

On appelle déterminant (resp. trace) d'un endomorphisme f et on note $\det(f)$ (resp. $\mathrm{Tr}(f)$), le déterminant (resp. la trace) de toute matrice représentative de f.

Exemple

Dans l'exemple 1, on vérifie bien que : $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M') = 4$; $\det(M) = \det(M') = 3$.

Le déterminant et la trace étant invariants par changement de base, on peut donner la définition suivante.

Définition 1.81

On appelle déterminant (resp. trace) d'un endomorphisme f et on note $\det(f)$ (resp. $\mathrm{Tr}(f)$), le déterminant (resp. la trace) de toute matrice représentative de f.

6 – Matrice, image et noyau

Il est souvent plus simple de travailler avec des matrices que des applications linéaires.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on pourra procéder comme suit :

$$x \in \mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow MX = 0 \text{ avec } X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \text{ et } M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

Exemple

L'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP' - P$ de $\mathbb{R}_2[X]$ admet comme matrice dans la base canonique : $\varphi(1) = -1$, $\varphi(X) = 0$ et $\varphi(X^2) = X^2$ donc la matrice de φ dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où,

$$P = a + bX + cX^2 \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Attention à ne pas dire que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, n'oublions pas que $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathbb{R}_2[X]$. On travaillait jusqu'à présent avec des coordonnées. On a en fait $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X)$.

Pour déterminer l'image d'une application linéaire, on pourra procéder comme suit :

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Im}(f) &\Longleftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \\ &\Longleftrightarrow X \in \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n) \text{ avec } X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \text{ et } C_i \text{ la i}^{\text{e}} \text{ colonne de } M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \end{aligned}$$

Exemple (suite)

La matrice de l'exemple précédent nous donne directement $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(-1, 0, X^2) = \mathrm{Vect}(1, X^2)$. Cette famille génératrice est même une base car $(1, X^2)$ est libre.

7 – Rang d'une matrice / d'une famille de vecteurs / d'une application linéaire

Il reste pour finir à faire le lien entre les différentes notions de rang apparues tout au long du chapitre.

Rappelons que l'on avait défini :

- le rang d'un système linéaire comme le nombre de pivots de n'importe quel système échelonné équivalent ;
- le rang d'une matrice comme le rang du système homogène associé ;
- le rang d'une famille de vecteurs comme la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs ;
- le rang d'une application comme la dimension de son image.

La cohérence de ces définitions est vérifiée grâce au résultat suivant :

Théorème 1.82

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ où E et F sont de dimension finie, avec $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F.
Si on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'}(f)$, alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M)$.

Démonstration

L'image de f est engendrée par $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))) &= \mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \\ &= \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(e_1), \dots, f(e_n))) \quad \text{(proposition précédente)} \\ &= \mathrm{rg}(M) \end{aligned}$$

D – Sous-espaces stables et endomorphismes induits (⋆)

Définition 1.83

On dit qu'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est stable par $f \in \mathscr{L}(E)$ si $f(F) \subset F$, autrement dit si :

$$\forall x \in F \quad f(x) \in F$$

Si c'est le cas, l'application restreinte $f_{|F}$ définie sur F par $f_{|F}(x) = f(x)$ est à valeurs dans F. Étant linéaire, $f_{|F}$ est un endomorphisme de F, appelé endomorphisme induit.

Définition 1.84

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On suppose que F est un s.e.v. de E stable par $f \in \mathscr{L}(E)$.
L'application $f_{|F}$ est est appelée endomorphisme induit.

Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de F que l'on complète en une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E, on a alors :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} f(e_1)\ \cdots\ f(e_p) & f(e_{p+1})\cdots f(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ \vdots\\ e_p\\ e_{p+1}\\ \vdots\\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{Mat}\left(f_{|F}\right)} & \boxed{\star} \\ \boxed{0} & \boxed{\star} \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{Mat}(f)$$

Si $E = F \oplus G$ et si F et G sont stables par f, on aura dans une base *adaptée* :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} f(e_1)\ \cdots\ f(e_p) & f(e_{p+1})\cdots f(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ \vdots\\ e_p\\ e_{p+1}\\ \vdots\\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{Mat}\left(f_{|F}\right)} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{\mathrm{Mat}\left(f_{|G}\right)} \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{Mat}(f)$$

Réciproquement, toute présence de blocs nuls dans une matrice définie par blocs peut s'interpréter comme une condition de stabilité.

Exemple

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ donc la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Posons $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$. F et G sont stables par f et les blocs non nuls font apparaître les matrices représentatives des endomorphismes induits $f_{|F}$ et $f_{|G}$ respectivement dans les bases (e_1, e_2) de F et (e_3, e_4) de G.

Exercice 7

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et φ l'aplication définie sur E par $\varphi(P) = X^2P' - (2X+1)P$.

(i) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

(ii) Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par φ. On note $\tilde{\varphi}$ l'endomorphisme induit.

(iii) Déterminer la matrice de $\tilde{\varphi}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

E – Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

1 – Homothétie

On appelle homothétie de rapport λ l'application linéaire h définie par :

$$\forall x \in E \quad h(x) = \lambda x$$

Autrement dit, $h = \lambda \mathrm{id}_E$ et quelle que soit la base $\mathscr{B}$ de E choisie, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h) = \lambda I_n$.

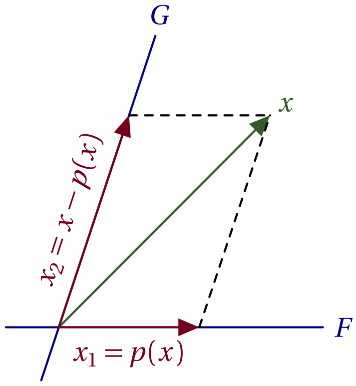
2 – Projecteur vectoriel

Définition 1.85 : Projecteur vectoriel

Soit $E = F \oplus G$. Si $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.
On appelle projection sur F parallèlement à G l'application linéaire p définie par :

$$\forall x \in E \quad p(x) = x_1$$

L'application p est linéaire et on a alors : $F = \mathrm{Im}(p)$, $G = \mathrm{Ker}(p)$ donc $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.



Projection d'un vecteur x sur F parallèlement à G

Théorème 1.86 : Caractérisation des projecteurs

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. p est une projection vectorielle sur $\mathrm{Im}(p)$, parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$ ssi $p \circ p = p$.

Démonstration

En utilisant les notations de la définition,

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que p est la projection vectorielle sur F parallèlement à G et considérons $x \in E$.

$$p(p(x)) = p(\underbrace{x_1}_{\in F}) = x_1 = p(x)$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $p \circ p = p$ et montrons que $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$.

- $E = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(p)$. En effet, pour tout $x \in E$, $x = p(x) + (x - p(x))$. $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, reste à montrer que $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ ce qui est bien le cas car :

$$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0_E$$

- De plus, $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p = \{0_E\}$. En effet, soit $x \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p$.
On a donc $p(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. Ainsi, $p(x) = 0_E = p(p(y)) = p(y) = x$ et on a bien $x = 0_E$.

Donc on a bien $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$.
Enfin, si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \mathrm{Im}\, p \times \mathrm{Ker}\, p$ alors,

$$p(x) = p(x_1 + x_2) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_1) = p(p(y_1)) = p(y_1) = x_1$$

p est bien la projection vectorielle sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$. ■

Exemple

Montrons que si p est un projecteur, alors $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.

- $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$
  Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$.
  Or $(p - \mathrm{id}_E)(x) = p(x) - x = p(p(y)) - p(y) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.
- $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Im}(p)$
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$. On a $p(x) - x = 0_E$ donc $x = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$.

Exercice 8

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est un projecteur et préciser ses caractéristiques géométriques.

Soit p une projection vectorielle. Comme nous venons de le voir, tout vecteur $x \in \mathrm{Ker}(p)$ vérifie $p(x) = 0_E$ et tout vecteur $x \in \mathrm{Im}(p)$ vérifie $p(x) = x$. Considérons maintenant une base $\mathscr{B}$ adaptée à $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ obtenue par concaténation d'une base de $\mathrm{Im}(p)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

Dans cette base, la matrice de p est diagonale.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Si l'on pose $q = \mathrm{id}_E - p$, q est également un projecteur : il s'agit du projecteur sur G parallèlement à F. On a $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $p + q = \mathrm{id}_E$.

Généralisons ce résultat pour une somme directe de n espaces vectoriels en supposant donc que

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$$

Ainsi, tout vecteur x de E se décompose de façon unique sous la forme $x = x_1 + \cdots + x_n$ où $x_i \in E_i$. Notons alors, pour $i \in [\![1, n]\!]$, p_i l'application définie sur E par $p_i(x) = x_i$. On montre aisément le résultat suivant :

Proposition 1.87

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, p_i est la projection vectorielle sur E_i parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} E_k$. De plus,

$$p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad \forall i \neq j \quad p_i \circ p_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

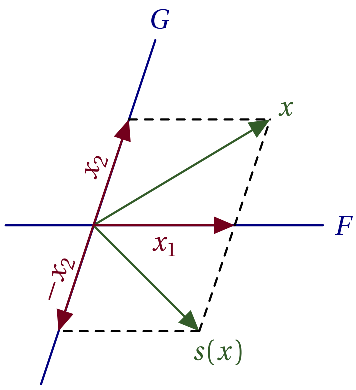
3 – Symétrie vectorielle

Définition 1.88 : Symétries vectorielles

Soit $E = F \oplus G$. Si $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.
On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application linéaire s définie par :

$$\forall x \in E \quad s(x) = x_1 - x_2.$$

L'application s est linéaire et on a : $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$, donc $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
On rappelle que $x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \Longleftrightarrow s(x) = x$ et $x \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \Longleftrightarrow s(x) = -x$.



Symétrie d'un vecteur x par rapport à F et parallèlement à G

Attention, deux sous-espaces vectoriels F et G de E ne sont pas nécessairement orthogonaux[3], les normes des vecteurs x et $s(x)$ – sauf cas particuliers – sont distinctes.

Théorème 1.89 : Caractérisation des symétries

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. s est une symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ si et seulement si $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que s est la symétrie vectorielle par rapport à F, parallèlement à G et considérons $x \in E$.

$$s(s(x)) = s(\underbrace{x_1}_{\in F} + \underbrace{(-x_2)}_{\in G}) = x_1 + x_2 = x$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

(a) Montrons que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. Procédons pour cela par analyse/synthèse.

- *Analyse*
  Soit $x \in E$. On suppose qu'il existe deux vecteurs $x_1 \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ tels que $x = x_1 + x_2$. On a $s(x) = x_1 - x_2$. Donc nécessairement,
  $$x_1 = \frac{x + s(x)}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{x - s(x)}{2}$$
- *Synthèse*
  Soit $x \in E$. Posons $x_1 = \dfrac{x + s(x)}{2}$ et $x_2 = \dfrac{x - s(x)}{2}$. On a bien $x = x_1 + x_2$. De plus,
  $$s(x_1) = \frac{s(x) + s(s(x))}{2} = \frac{x + s(x)}{2} = x_1 \text{ et } s(x_2) = \frac{s(x) - s(s(x))}{2} = -\frac{x - s(x)}{2} = -x_2$$
  donc $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \times \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Nous avons donc prouvé que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

(b) Enfin, si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \times \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ alors,
$$s(x) = s(x_1 + x_2) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2$$
s est bien la symétrie vectorielle sur $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. ■

3. La notion de produit scalaire, donc d'orthogonalité, dans un espace vectoriel quelconque sera abordée plus tard dans l'année.

Exercice 9

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que g est une symétrie vectorielle et préciser ses caractéristiques géométriques.

Soit s une projection vectorielle. Comme nous venons de le voir, tout vecteur $x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ vérifie $s(x) = x$ et tout vecteur $x \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ vérifie $s(x) = -x$. Considérons maintenant une base $\mathscr{B}$ adaptée à $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ obtenue par concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Dans cette base, la matrice de s est diagonale.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10

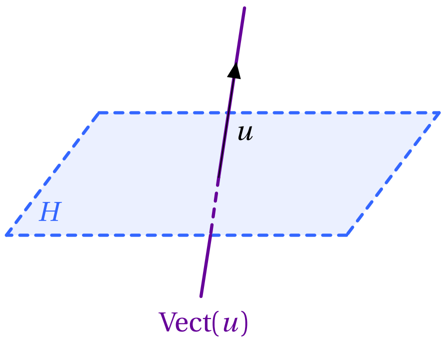
Pour chacun des endomorphismes précédemment définis (homothétie, projecteur, symétrie), préciser leur trace, leur rang et leur déterminant. Sont-ils des automorphismes ?

III | Hyperplans en dimension finie ($\star$)

E désigne dans tout ce paragraphe un espace vectoriel de dimension finie.

Définition 1.90 : Hyperplan

On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E admettant une droite comme supplémentaire.
Autrement dit, si H est un hyperplan de E, il existe $u \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(u)$.



Représentation d'un hyperplan en dimension 3

D'après la définition d'un hyperplan, il est immédiat que celui-ci est de dimension $n-1$ lorsque E est un espace de dimension finie n. Réciproquement, tout espace de dimension $n-1$ est un hyperplan de E d'après les propriétés précédemment énoncées.

Ainsi, les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ seront les droites vectorielles ; les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ les plans vectoriels. Les hyperplans ne sont que la généralisation de la notion de plan en dimension supérieure.

Théorème 1.91 : Caractérisation d'un hyperplan en dimension finie

On suppose E de dimension n. H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = n-1$.

Tout droite du plan admet une équation de la forme $ax + by = 0$ et tout plan de l'espace admet une équation de la forme $ax + by + cz = 0$. Nous allons généraliser ce résultat.

Notons pour cela $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un vecteur x dans une base quelconque de E et remarquons que l'équation $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ correspond au noyau d'une application linéaire bien choisie. Ce qui amène naturellement au théorème suivant.

Théorème 1.92 : Caractérisation d'un hyperplan (bis)

H est un hyperplan de E si et seulement si $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ où $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est non nulle.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit H un hyperplan de E, donc un sous-espace de dimension $n-1$. On considère alors une base $(e_1,\dots,e_{n-1})$ de cet espace que l'on complète en une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E. Comme tout élément $x\in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1e_1+\dots+x_ne_n$, on peut considérer l'application $\varphi : x\mapsto x_n$. φ est bien une forme linéaire. Elle est non nulle car $\varphi(e_n)=1$ et enfin :

$$x\in\mathrm{Ker}(\varphi) \iff \varphi(x)=0_{\mathbb{K}} \iff x = x_1e_1+\dots+x_{n-1}e_{n-1}\in H$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons maintenant que $H=\mathrm{Ker}(\varphi)$ avec $\varphi\in\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ non nulle.
$\mathrm{Im}\,\varphi\subset\mathbb{K}$ donc $0\leqslant \mathrm{rg}(\varphi)\leqslant 1$. Comme φ est non nulle, $\mathrm{rg}(\varphi)=1$ donc d'après le théorème du rang, on a bien $\dim\mathrm{Ker}\,\varphi = n-1$. ■

Comme $\varphi(x)=\varphi(x_1e_1+\dots+x_ne_n)=x_1\varphi(e_1)+\dots+x_n\varphi(e_n)$, on peut alors poser $a_i=\varphi(e_i)\in\mathbb{K}$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ et on obtient l'équation linéaire recherchée :

$$x = x_1e_1+\dots+x_ne_n\in H \iff a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$$

Attention, tout comme il n'y a pas unicité de l'équation d'un hyperplan dans une base donnée, il n'y a pas non plus unicité de la forme linéaire φ.

Une telle application $\varphi\in\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est appelée plus généralement *forme linéaire*.

Proposition 1.93 : Intersection de p hyperplans

Soit E un espace de dimension n et p un entier inférieur ou égal à n.

(i) L'intersection de p hyperplans de E est un sous-espace de dimension au moins $n-p$.

(ii) Tout sous-espace de dimension $n-p$ est l'intersection de p hyperplans de E.

Démonstration

Utilisons le théorème précédent pour prouver ce résultat.

(i) Considérons p hyperplans de E, notés $H_1,\dots,H_p$. Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, notons φ_i une forme linéaire non nulle de E telle que $H_i=\mathrm{Ker}(\varphi_i)$. Considérons enfin l'application linéaire :

$$\varphi : \left|\begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(x),\dots,\varphi_p(x)) \end{array}\right.$$

$\mathrm{Ker}(\varphi)=\bigcap_{i=1}^{p}\mathrm{Ker}(\varphi_i)=\bigcap_{i=1}^{p}H_i$ et, comme $\mathrm{Im}(\varphi)\subset\mathbb{K}^p$, d'après le théorème du rang :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p}H_i\right)=\dim(E)-\mathrm{rg}(\varphi)\geqslant n-p$$

Nous verrons en exercice comment procéder autrement en raisonnant par récurrence.

(ii) Considérons maintenant un sous-espace F de E de dimension $n-p$. Notons $(e_{p+1},\dots,e_n)$ une base de F que l'on complète en une base $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ de E. Posons alors :

$$\forall i\in[\![1,p]\!]\quad H_i=\underset{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}}{\mathrm{Vect}}(e_k)$$

On laisse aux lecteurs le soin de montrer que les espaces H_i sont des hyperplans dont l'intersection est égale à F. ■

Considérons le système d'équation linéaires $n \times p$ sans second membre suivant :

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{p1}x_p + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Il peut s'interpréter naturellement comme l'intersection de p hyperplans, chaque équation linéaire représentant un hyperplan donné. D'après ce qui précède, l'ensemble des solutions sera donc un espace vectoriel de dimension *au moins* $n-p$. Attention cependant, la dimension ne sera égale à $n-p$ que si les équations sont linéairement indépendantes les unes des autres. Dans le cas d'équations indépendantes, chaque équation supplémentaire impose une nouvelle contrainte sur l'ensemble des solutions, d'où la perte d'un degré de liberté.

Exemples

Considérons les deux systèmes :

$$(\Sigma_1) \quad \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \qquad (\Sigma_2) \quad \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations de ces deux systèmes sont linéairement indépendantes. L'ensemble des solutions est donc de dimension au plus 1. La dernière équation de (Σ_1) est linéairement indépendante des deux autres donc l'ensemble des solutions est de dimension 0, seul le triplet $(0,0,0)$ est solution. La dernière équation de (Σ_2) étant quant à elle la somme des deux premières, l'ensemble des solutions est un espace de dimension 1, c'est la droite vectorielle d'équations :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$