8 | Courbes planes

« La ligne courbe est la ligne la plus jolie d'un point à un autre. »
Mae West, actrice américaine (1893–1960)

Plan de cours

I | Préliminaires sur les fonctions vectorielles d'une variable réelle

A – Rudiments de topologie dans $\mathbb{R}^m$

1 – Norme euclidienne

Définition 8.1 : Norme euclidienne

Soit $x = (x_1, \dots, x_m)$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$. On appelle norme euclidienne de x le réel positif ou nul :

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_i^2}$$

- Pour $m = 1$, on a $||x|| = \sqrt{x_1^2} = |x_1|$.
- Pour $m = 2$, on a $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |x_1 + i\,x_2|$.

Voici quelques propriétés classiques vérifiées par la norme euclidienne :

Proposition 8.2

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^m$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $||x|| \geqslant 0$ et $||x|| = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^m}$.
- $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.
- Inégalité triangulaire :

$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leqslant ||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$$

Nous reviendrons sur ce résultat dans le chapitre « Espaces préhilbertiens réels ».

Pour $x=(x_1,\dots,x_m)$ et $i\in[\![1,m]\!]$, $|x_i|\leqslant\|x\|$. En effet,

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_m^2}\geqslant\sqrt{0+\cdots+0+x_i^2+0+\cdots 0}=|x_i|$$

Pour $m=2$, on retrouve les inégalités bien connues $|\mathrm{Re}(z)|\leqslant|z|$ et $|\mathrm{Im}(z)|\leqslant|z|$.

Pour $x,y\in\mathbb{R}^m$, $\|x-y\|$ représente la *distance* entre les points x et y.

2 – Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^m$

Exercice 1

Représenter les ensembles suivants lorsque $m=1$, 2 ou 3.

$$\{x\in\mathbb{R}^m\mid\|x\|\leqslant 1\},\{x\in\mathbb{R}^m\mid\|x\|=1\},\{x\in\mathbb{R}^m\mid\|x\|<1\}$$

Nous allons à présent généraliser les notions de disques et de boules en dimension finie.

Définition 8.3 : Boules ouvertes et fermées

Soit $a\in\mathbb{R}^m$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$.

- On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble $\mathcal{B}(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^m\mid\|x-a\|<r\}$.
- On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble $\mathcal{B}_f(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^m\mid\|x-a\|\leqslant r\}$.

$\{x\in\mathbb{R}^m\mid\|x\|<1\}$ représente donc la boule ouverte de centre $0_{\mathbb{R}^m}$ et de rayon 1. Ainsi,

$$]-1,1[\text{ est une boule ouverte de }\mathbb{R}; \quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<1\}\text{ est une boule ouverte de }\mathbb{R}^2.$$

Définition 8.4 : Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^m$

- Une partie A de $\mathbb{R}^m$ est dite ouverte si : $\forall x\in A,\ \exists r>0,\ B(x,r)\subset A$.
- Une partie A de $\mathbb{R}^m$ est dite fermée si son complémentaire, c'est-à-dire $\mathbb{R}^m\setminus A$, est ouvert.

On montre facilement que :

- Une boule ouverte est un ouvert et une boule fermée est un fermé.
- Une partie peut être à la fois ouverte et fermée, et, de même, ni ouverte ni fermée !
  Ex. : $\varnothing$ et $\mathbb{R}^m$ sont à la fois ouverts et fermés. $[0,1[$ n'est ni un fermé ni un ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On considère les deux ensembles :

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid -1<x<1,-1<y<1\}$$

$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid -1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1\}$$

Représenter ces parties de $\mathbb{R}^2$ et dire si elles sont ouvertes ou fermées.

Lorsqu'une partie est décrite à l'aide d'inéquations, on se contentera de voir si les inégalités sont strictes ou larges.

Définition 8.5 : Partie bornée

Une partie A de $\mathbb{R}^m$ est bornée si elle est contenue dans une boule de rayon M.
Autrement dit, A est bornée si : $\exists M\geqslant 0,\ \forall x\in A,\ \|x\|\leqslant M$.

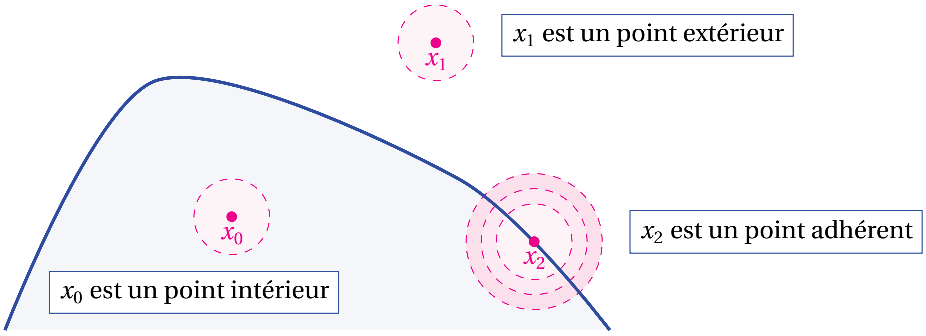
Exercice 3

Montrer que les parties de $\mathbb{R}^2$ définies dans l'exercice précédent sont bornées.

Définition 8.6 : Point intérieur, point adhérent, point extérieur

Soit A une partie de $\mathbb{R}^m$ et $x \in \mathbb{R}^m$.

- On dit que x est un point intérieur de A s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathscr{B}(x,r) \subset A$.
- On dit que x est un point extérieur de A s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathscr{B}(x,r) \cap A = \varnothing$.
- On dit que x est un point adhérent à A si pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{B}(x,r) \cap A \neq \varnothing$.

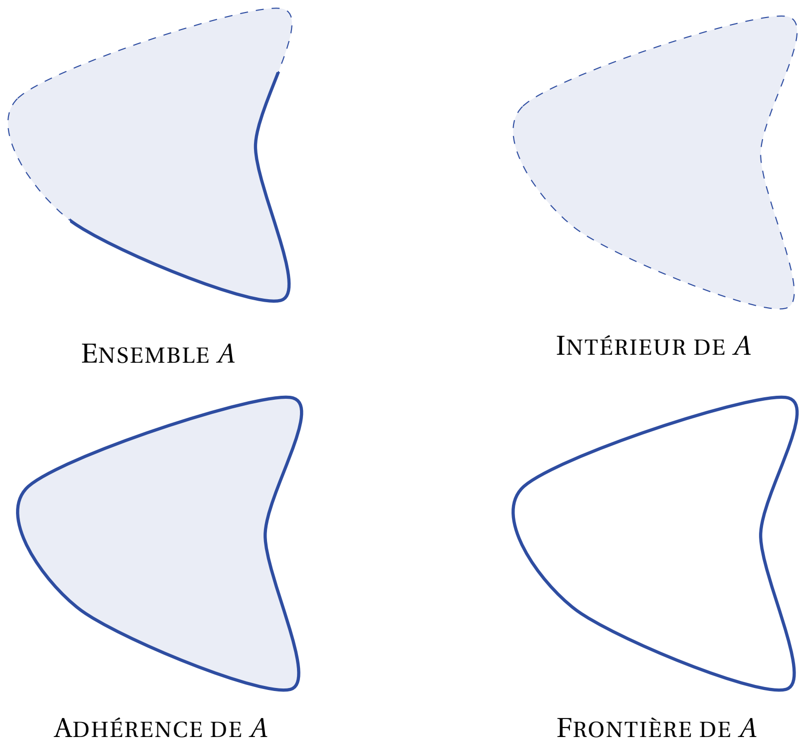


Définition 8.7 : Frontière

Soit A une partie de $\mathbb{R}^m$. La frontière de A est l'ensemble des points x tels que toute boule ouverte centrée en x rencontre à la fois A et son complémentaire.

C'est finalement l'ensemble des points de A qui sont dans l'adhérence sans être à l'intérieur...

Un dessin valant mieux que de longs discours, résumons la situation aux dessins suivants.



B – Fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

Dans toute partie, f désignera une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Ainsi,

$$f : \left| \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ t & \longmapsto & (f_1(t), \dots, f_m(t)) \end{array} \right.$$

Les fonctions $f_i : I \to \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, \dots, m\}$ sont appelées fonctions coordonnées.

En pratique, on travaillera souvent avec $m = 2$ ou $m = 3$.

Définition 8.8 : Limite

On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}^m$ pour limite en $t_0 \in I$ si $\lim\limits_{t \to t_0} \|f(x) - \ell\| = 0$, c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall t \in I \quad |t - t_0| < \eta \Longrightarrow \|f(t) - \ell\| < \varepsilon$$

On peut montrer que lorsque la limite existe, elle est unique. De plus, f admet $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$ pour limite en $t_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si chaque fonction coordonnées f_i admet ℓ_i comme limite en t_0.

Exemple

L'application $t \mapsto \begin{pmatrix} \ln\left(\sqrt{1+t^2}\right) \\ \sin\left(2t^2 - \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$ admet une limite en 0. Que vaut-elle ?

Définition 8.9 : Continuité

- f est dite continue en $t_0 \in I$ si $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$.
- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Proposition 8.10 : Continuité et fonctions coordonnées

f est continue en $t_0 \in I$ si et seulement si f_i est continue en t_0 quel que soit $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Exemple

L'application $t \mapsto \begin{pmatrix} \ln\left(\sqrt{1+t^2}\right) \\ \sin\left(2t^2 - \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car chacune des fonctions coordonnées l'est.

Définition 8.11 : Dérivabilité

- f est dite dérivable en $t_0 \in I$ si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ existe.

  On appelle alors vecteur dérivé en t_0 le vecteur $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ et on le note $f'(t_0)$.
- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I et on appelle alors dérivée de f l'application $f' : t \mapsto f'(t)$.

On définie de façon analogue le vecteur dérivé de f à droite et à gauche de t_0 et la dérivabilité de f se traduit par la dérivabilité des fonctions coordonnées. Nous admettons également les propriétés suivantes :

Proposition 8.12 : Opérations sur les dérivées

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^m$ deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\lambda f + g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$;

(ii) si $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, $\lambda \cdot f$ l'est également et $(\lambda \cdot f)' = \lambda' \cdot f + \lambda \cdot f'$;

(iii) si $\lambda : \mathbb{R} \to I$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f \circ \lambda$ l'est également et $(f \circ \lambda)' = \lambda' \cdot (f' \circ \lambda)$;

(iv) si on note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^m$, $(f|g)$ est dérivable sur I et $(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$;

(v) pour $m = 3$, $f \wedge g$ est dérivable sur I et $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.

Attention, le produit $f \times g$ n'a aucun sens lorsque $m \neq 1$!

Définition 8.13

f est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si elle est dérivable k fois sur I et si sa dérivée k-ième notée $f^{(k)}$ est continue sur I.

Lorsque l'on multiplie f par une fonction λ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on retrouve un résultat bien connu.

Proposition 8.14 : Formule de Leibniz

Si $f : I \to \mathbb{R}^m$ et $\lambda : I \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I alors,

$$(\lambda \cdot f)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{(k)} f^{(n-k)}$$

Démonstration

On montre ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. ■

Nous aurons besoin, lors de l'étude de courbes paramétrées, d'obtenir des développements limités de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Nous nous limiterons donc au cas d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I avec $m = 2$. Nous énoncerons simplement la formule de Taylor-Young dans ce cas particulier.

Définition 8.15 : Développement limité

Soient $f : t \mapsto (x(t), y(t))$ une fonction définie sur un intervalle I et $t_0 \in I$.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de t_0 si et seulement si x et y admettent un développement limité au voisinage de t_0.

Théorème 8.16 : Formule de Taylor-Young

Soient $f : t \mapsto (x(t), y(t))$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I et $t_0 \in I$. Alors,

$$f(t) \underset{t \to t_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \cdot \begin{pmatrix} x^{(k)}(t_0) \\ y^{(k)}(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{o}\left((t-t_0)^n\right) \\ \mathrm{o}\left((t-t_0)^n\right) \end{pmatrix}$$

Attention à ne pas écrire, $\begin{pmatrix} \mathrm{o}\left((t-t_0)^n\right) \\ \mathrm{o}\left((t-t_0)^n\right) \end{pmatrix} = \mathrm{o}\left((t-t_0)^n\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, les petits o en jeu ne sont pas de même nature.

Munis de toutes ces définitions et de ces théorèmes, nous pouvons enfin aborder le cœur du chapitre : les courbes !

II | La notion de courbe

A – Divers modes de définition d'une courbe

Certaines parties du plan sont appelées « courbes ». Sans donner de définition rigoureuse de cette notion [1], nous allons étudier trois cas particuliers pour lesquels on peut parler de courbes.

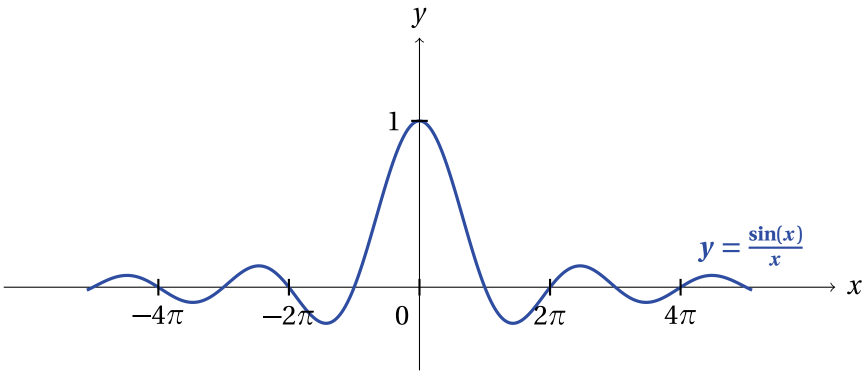
1. Intuitivement, une courbe est un objet unidimensionnel alors que le terme « surface » se réfère à un objet de dimension 2.

1 – Équation cartésienne

Définition 8.17 : Équation cartésienne

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle I. La courbe définie par l'équation cartésienne $y = f(x)$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$, c'est-à-dire l'ensemble :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } y = f(x)\}$$



Courbe représentative de la fonction sinus cardinal

2 – Paramétrage

Définition 8.18 : Équations paramétriques

Soit $x, y : I \to \mathbb{R}$ deux applications définies sur un intervalle I. La courbe définie par le paramétrage $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x(t), y(t))$, c'est-à-dire l'ensemble :

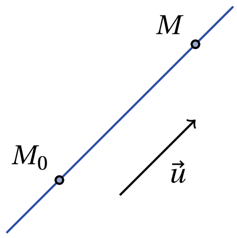
$$\{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\}$$

Exemple – Paramétrage d'une droite

Considérons la droite passant par le point $M_0(x_0, y_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$M(x, y)$ appartient à cette droite si et seulement si $\overrightarrow{M_0M}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{u} &\iff \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x = x_0 + t\,a \\ y = y_0 + t\,b \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

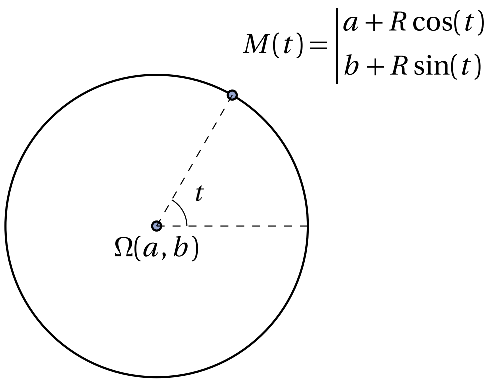


Exemple – Paramétrage d'un cercle

Considérons le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R. $M(x, y)$ appartient au cercle si et seulement si $\Omega M = R$, c'est-à-dire si :

$$\left(\frac{x-a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{R}\right)^2 = 1$$

Exemple – Paramétrage d'un cercle (suite)



Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{x-a}{R} = \cos(t) \quad \text{et} \quad \frac{y-b}{R} = \sin(t)$$

Ce qui fournit le paramétrage suivant :

$$\begin{cases} x(t) = a + R\cos(t) \\ y(t) = b + R\sin(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3 – Équation implicite

Définition 8.19 : Équation implicite

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle I. La courbe d'équation $F(x, y) = 0$ est l'ensemble :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

Exemple – Équation de droite

Une droite de vecteur normal $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $\alpha x + \beta y - \gamma = 0$.

Exemple – Équation de cercle

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle, un cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R admet comme équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$.

L'étude des courbes définies de façon implicite fera l'objet d'un prochain chapitre.

B – Changement de mode de représentation

— On transforme aisément une équation cartésienne $y = f(x)$ en équations paramétriques : il suffit de prendre x comme paramètre : $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$
L'application $x \mapsto (x, f(x))$ est injective[2], la courbe ne peut donc avoir de points doubles.

— Une équation cartésienne $y = f(x)$ est en fait un cas particulier d'équation implicite :

$$F(x, y) = y - f(x) = 0$$

Les transformations inverses ne sont possibles, en général, que localement.
En voici quelques exemples.

Exemple – Cercle

Considérons le cercle d'équation $x^2 + y^2 = R^2$.
On trouve alors $y = f(x)$ avec $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ ou $f(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Dans les deux cas, la courbe représentative de f est un demi-cercle. On peut démontrer qu'il n'existe pas d'application $f : I \to \mathbb{R}$ telle que l'équation $y = f(x)$ définisse « entièrement » un cercle !

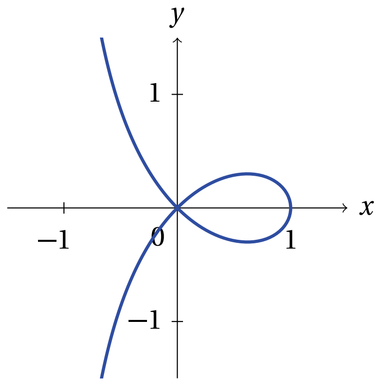
2. Quand on trace une courbe d'équation $y = f(x)$, on ne peut pas « repartir en arrière ».

Exemple – Strophoïde

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{t-t^3}{1+t^2} \quad (t \in \mathbb{R})$$

On remarque que $t = \dfrac{y}{x}$ d'où l'équation implicite :

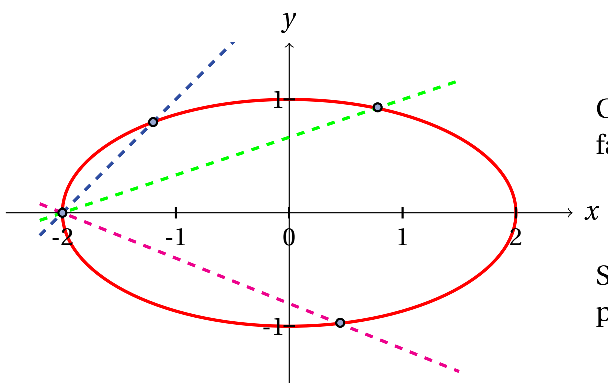
$$x(x^2+y^2) - (x^2-y^2) = 0$$



STROPHOÏDE DROITE

Dans l'autre sens, on peut parfois avoir recours à un faisceau de droites adapté à la courbe. Si chaque droite du faisceau coupe la courbe en un point (dont on peut calculer les coordonnées) et si ce point décrit toute la courbe, il suffit de résoudre l'équation aux intersections. Un exemple est plus parlant.

Exemple – Paramétrage d'une ellipse



ELLIPSE ET FAISCEAU DE DROITES

Considérons l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation $x^2 + 4y^2 = 4$ et le faisceau de droites :

$$\mathscr{D}_t : y = t(x+2)$$

Sont représentées sur le dessin les droites obtenues pour trois valeurs de t.

On cherche alors les points appartenant à $\mathscr{E} \cap \mathscr{D}_t$ ce qui nous donne comme solution les points de coordonnées $(-2, 0)$ et :

$$\begin{cases} x = \dfrac{2-8t^2}{1+4t^2} \\ y = \dfrac{4t}{1+4t^2} \end{cases}$$

Ceci est *un* paramétrage de l'ellipse, privée du point $(-2, 0)$ correspondant à un point limite.

On vérifie à l'aide de l'équation implicite que cette ellipse est également paramétrée par $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$

III | Courbes paramétrées

A – Généralités

Définition 8.20 : Courbe paramétrée, support

- On appelle courbe paramétrée toute application f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
- On appelle alors support de la courbe paramétrée par f l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ pour $t \in I$.

On ne confondra pas la courbe paramétrée et son support tout comme on distinguera bien en physique le mouvement de la trajectoire. Deux courbes paramétrées distinctes peuvent en effet avoir même support : les images sont identiques mais la façon de parcourir cette courbe diffère.

Exemple

> On peut paramétrer le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point de coordonnées $(1,0)$ des deux façons suivantes :
>
> $$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \quad \text{pour } \theta \in]-\pi, \pi[; \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ y = \dfrac{2u}{1+u^2} \end{cases} \quad \text{pour } u \in \mathbb{R}$$
>
> On peut facilement faire le lien (dans ce cas) entre les deux paramétrages en posant $u = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

Par la suite, f désignera une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, que l'on suppose muni de sa structure euclidienne usuelle. On pose $f(t) = (x(t), y(t))$ où x et y représentent les fonctions coordonnées de la fonction f. Comme nous l'avons vu, cette application f définit une courbe paramétrée. On utilisera selon les besoins (point de vue affine/vectoriel) :

- le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$;
- le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$

B – Courbes paramétrées en mécanique et en mathématiques

L'étude d'un mouvement ponctuel en mécanique classique se modélise par une application d'un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (pour un mouvement plan). Si on pose $f : t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = (x(t), y(t))$, $f(t)$ représente la position du point mobile à l'instant t. Le paramètre t représente dans ce formalisme le temps.
La trajectoire subséquente au mouvement est l'ensemble décrit par le point $M(t)$ lorsque t varie, c'est donc une courbe au sens géométrique. Les notions de vitesse et d'accélération sont représentées par les dérivées première $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ et seconde $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$ de l'application f.
Le mouvement, c'est-à-dire l'application f elle-même, indique de quelle manière cette courbe est décrite :

- dans quel sens (problème d'orientation de la courbe);
- avec quelle vitesse scalaire $\left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right\|$;
- quelle est la distance parcourue pendant une durée donnée;
- *etc.*

En général, un mouvement est défini par des conditions initiales (position du mobile à l'instant t_0, vitesse initiale) et par la donnée des forces qui agissent sur le mobile. La relation fondamentale de la dynamique se traduit alors par une équation différentielle.

En mathématiques, la recherche de certains lieux géométriques conduit à des équations dont les solutions sont obtenues sous forme paramétrique, le lieu est donc une courbe paramétrée. Le paramètre a généralement dans ce cas une véritable interprétation géométrique. Le choix du paramètre est d'ailleurs une étape importante dans le recherche du lieu.

C – Construction d'une courbe paramétrée

Pour construire une courbe paramétrée, on pourra suivre le plan d'étude présenté dans ce document ou bien se laisser guider par l'énoncé.

1 – Domaine de définition $\mathscr{D}$

Il s'agit de déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de la fonction f, intersection des domaines de définition des deux fonctions x et y.

Exemple

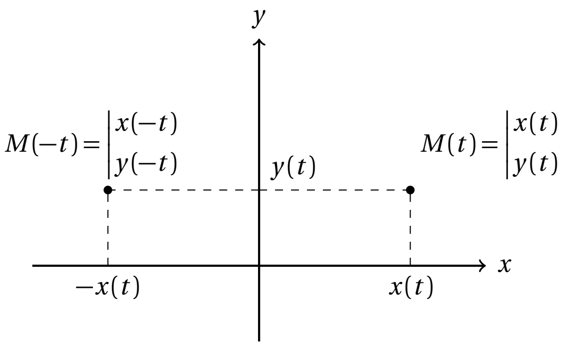
> On trouve $\mathscr{D} =]0,1]$ pour $\begin{cases} x(t) = \ln(t) \\ y(t) = \sqrt{1-t} \end{cases}$

2 – Recherche des symétries

Ceci permet de réduire le domaine d'étude[3]. Il existe de nombreuses possibilités.

- Si x et y sont T-périodiques, il suffit d'étudier x et y sur un intervalle de longueur T.
- Si x et y sont paires, $M(-t) = M(t)$ et on peut alors simplement travailler sur $\mathscr{D} \cap \mathbb{R}_+$.
- Si x et y sont impaires, $M(-t) = -M(t)$. On étudie les variations de x et y sur $\mathscr{D} \cap \mathbb{R}_+$ et on obtient la courbe en effectuant une symétrie centrale de centre O.
- *etc.*

Tout est simple sur un dessin !



EXEMPLE DE SYMÉTRIE (x IMPAIRE, y PAIRE)

Exemple

> Construction du cercle paramétré par $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$
>
> On constate que $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ mais on peut restreindre le domaine d'étude en constatant que $M(t+2\pi) = M(t)$. On peut donc se placer sur $[-\pi, \pi]$. Comme de plus, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, on peut se contenter d'étudier les variations de x et y sur $[0, \pi]$ et obtenir la courbe « entière » par réflexion par rapport à l'axe (Ox). On tracera sur une feuille le demi-cercle obtenu pour $t \in [0, \pi]$ et on cherchera comment obtenir le cercle complet.

3 – Étude des variations

Il s'agit comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle d'étudier le signe des dérivées[4] x' et y' sur le domaine d'étude restreint. Ceci nous permet d'obtenir les variations de x et y[5].

Exemple

> Étude de la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$
>
> On constate que les fonctions considérées sont 2π-périodiques et impaires, on étudiera seulement leurs

3. Cette étape est essentielle : en limitant le domaine d'étude, on espère limiter la difficulté technique d'étude du signe de la dérivée.
4. en justifiant bien entendu la dérivabilité des fonctions concernées…
5. On prendra soin de juxtaposer les variations de x et y dans le tableau pour plus de lisibilité lors du tracer.

variations sur $[0,\pi]$.

$$\forall t \in [0,\pi], \quad x'(t) = \cos(t) \text{ et } y'(t) = 2\cos(2t)$$

D'où les variations suivantes.

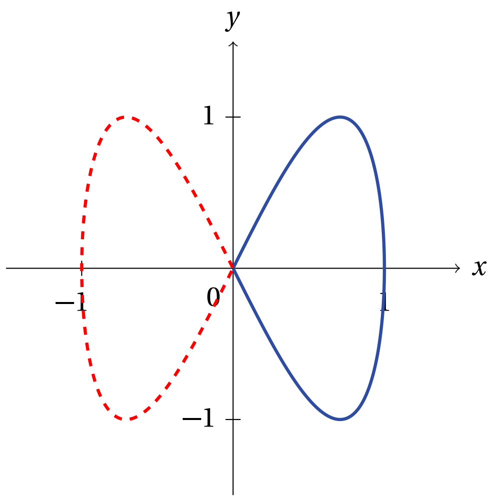
t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	0 ↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ↗	1	↘ $\frac{1}{\sqrt{2}}$	↘ 0
$y(t)$	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0
$y'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Il suffit de tracer la courbe passant par les points :

$$A(0,0), B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), C(1,0) \text{ et } D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$$

en respectant les variations précédentes.

On complète alors la courbe obtenue par symétrie centrale.



Lemniscate de Bernoulli

Cette étude n'est cependant pas satisfaisante et l'allure de la courbe dessinée à partir de ces résultats n'est généralement que très approximative. Il reste à étudier son allure de manière plus fine au voisinage de certains points en s'intéressant notamment aux tangentes.

4 – Points réguliers et stationnaires

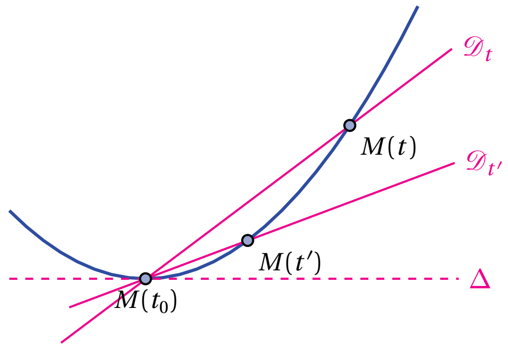
Définition 8.21 : Tangente

Soit $t_0 \in I$.

- si le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\left\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\right\|}$ admet une limite $\vec{u}$ lorsque $t \to t_0^-$, on appelle demi-tangente à gauche en $M(t_0)$ la demi-droite issue de $M(t_0)$ et dirigée par $\vec{u}$.
- si le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\left\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\right\|}$ admet une limite $\vec{v}$ lorsque $t \to t_0^+$, on appelle demi-tangente à droite en $M(t_0)$ la demi-droite issue de $M(t_0)$ et dirigée par $\vec{v}$.
- Si les demi-tangentes à gauche et à droite existe et si, avec les notations précédentes, $\vec{u} = \pm\vec{v}$, alors on appelle tangente en $M(t_0)$ la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par $\vec{u}$.

La tangente n'est rien d'autre, lorsqu'elle existe, que la limite des sécantes.

Sur le schéma ci-contre, la tangente Δ au point $M(t_0)$ apparaît comme une droite limite : la limte de $\mathscr{D}_t$ quand $t \to t_0$.



TANGENTE VUE COMME LIMITE DES SÉCANTES

Définition 8.22 : Point régulier

Un point $M(t_0)$ est dit régulier lorsque $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$ ne s'annule pas.
Sinon, le point est dit stationnaire (ou singulier).

La courbe est dite régulière si le vecteur dérivée ne s'annule pas en tout point.

Théorème 8.23 : Tangente en un point régulier

Si $M(t_0)$ est régulier, la courbe admet une tangente en ce point dirigée par le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$.

Démonstration

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si $M(t_0)$ est régulier, on peut écrire :

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(t_0) \text{ donc } \lim_{t\to t_0} \frac{\left\|f(t)-f(t_0)\right\|}{|t-t_0|} = \left\|f'(t_0)\right\| \neq 0$$

Ainsi,

$$\frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\left\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\right\|} = \frac{f(t)-f(t_0)}{\left\|f(t)-f(t_0)\right\|} = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \times \frac{t-t_0}{\left\|f(t)-f(t_0)\right\|} \xrightarrow[t\to t_0^{\pm}]{} \pm \frac{f'(t_0)}{\left\|f'(t_0)\right\|}$$

La tangente existe, elle est dirigée par le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ qui est colinéaire au vecteur $\dfrac{f'(t_0)}{\left\|f'(t_0)\right\|}$. ■

Si le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ est non nul [6] et qu'il a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors la tangente au point $M(t_0)$ admet comme vecteur normal $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et une équation de la tangente est alors :

$$-bx + ay = c$$

où l'on détermine c en utilisant le fait que $M(t_0)$ appartient lui-même à la tangente.

La pente de la tangente vaut alors $\dfrac{b}{a} = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

6. Si le vecteur était nul, cela n'aurait pas de sens de dire que la tangente est dirigée par ce vecteur.

Exemple

> Tous les points du cercle paramétré par $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ sont réguliers.
> En effet, les coordonnées de $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ ne peuvent s'annuler simultanément.
> La tangente en un point $M(t_0)$ est alors dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix}$.

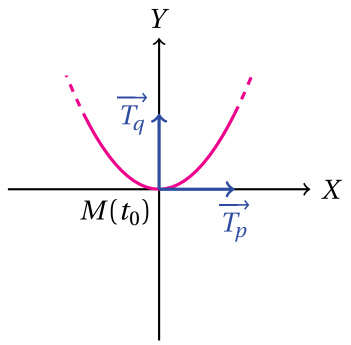
Lorsque le point $M(t_0)$ est stationnaire, les choses se compliquent. On effectue un développement limité des deux fonctions coordonnées x et y au voisinage de t_0 jusqu'à l'obtention de deux vecteurs indépendants qui constitueront avec le point stationnaire $M(t_0)$ un repère local.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + (t-t_0)^p \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \cdots + (t-t_0)^q \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{o}((t-t_0)^q) \\ \mathrm{o}((t-t_0)^q) \end{pmatrix}$$

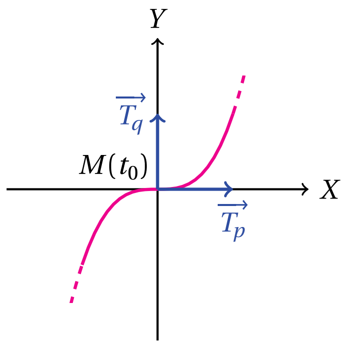
$\overrightarrow{T_p}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est le premier vecteur non nul du DL et $\overrightarrow{T_q}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ le premier vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{T_p}$.
On doit donc avoir $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. $\overrightarrow{T_p}$ dirige alors la tangente au point $M(t_0)$.
Si on note $(X(t), Y(t))$ les coordonnées de $M(t)$ dans le repère local, on a :

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = f(t) - f(t_0) = X(t) \cdot \overrightarrow{T_p} + Y(t) \cdot \overrightarrow{T_q} \quad \text{avec} \quad X(t) \sim (t-t_0)^p \text{ et } Y(t) \sim (t-t_0)^q$$

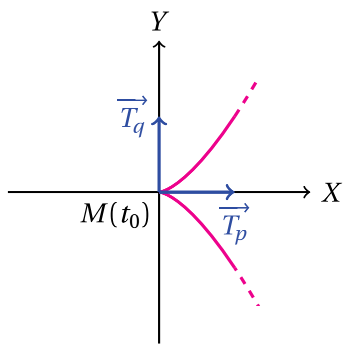
Il y a alors quatre configurations possibles correspondant aux quatres graphes[7] suivants :



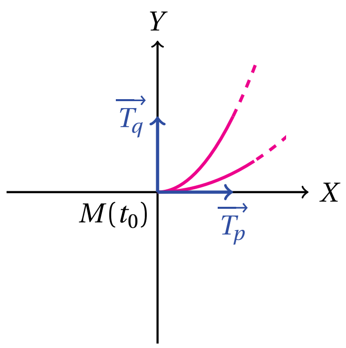
Point ordinaire (p impair, q pair)



Point d'inflexion (p impair, q impair)



Point de rebroussement de première espèce
(p pair, q impair)



Point de rebroussement de seconde espèce
(p pair, q pair)

Rien ne nous assurent que de tels vecteurs $\overrightarrow{T_p}$ et $\overrightarrow{T_q}$ existent[8].

7. Contrairement à ce que pourraient laisser penser les dessins, $\overrightarrow{T_p}$ et $\overrightarrow{T_q}$ n'ont aucune raison d'être orthogonaux! Retrouvez la position de la courbe par rapport aux axes en utilisant la parité de p et q.
8. Ce sera toujours le cas dans le cadre des concours.

Exemple

Recherche des points stationnaires de la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \\ y(t) = \dfrac{t^3-1}{t^2+1} \end{cases}$$

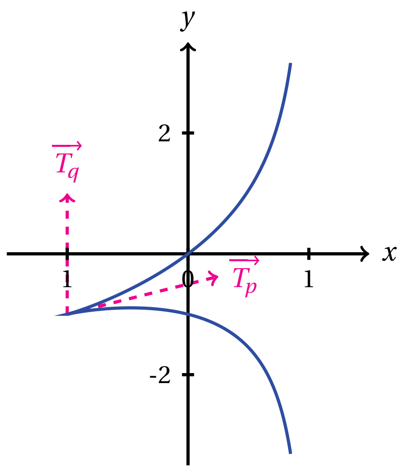
On trouve, après simplications,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x'(t) = \frac{4t}{(t^2+1)^2}; \quad y'(t) = \frac{t(t^3+3t+2)}{(t^2+1)^2}$$

Les dérivées ne s'annulent simultanément que pour $t=0$, ce qui signifie que la courbe n'admet qu'un seul point stationnaire $M(-1,-1)$. On effectue alors un DL au voisinage de 0 à l'ordre 3 (en fait, aussi loin qu'il le faut) pour avoir plus de renseignements.

On obtient :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^3) \\ o(t^3) \end{pmatrix}$$



Comme $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, nous avons affaire à un point de rebroussement de première espèce, ce que l'on peut constater graphiquement.

Pour des raisons de lisibilité, les vecteurs $\overrightarrow{T_p}$ et $\overrightarrow{T_q}$ ne sont pas représentés à la bonne échelle.

La tangente passe par le point $M(-1,-1)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{T_p}(2,1)$.

5 – Branches infinies

Il y a une branche infinie si l'une des coordonnées tend vers l'infini lorsque t tend vers t_0.
Si une seule des coordonnées tend vers l'infini et l'autre admet une limite finie, la situation est claire, il y a une asymptote horizontale ou verticale.

Si les deux coordonnées tendent vers l'infini, on étudie la limite du rapport $\dfrac{y(t)}{x(t)}$.

— Si la limite est 0, on dit que l'on a une branche parabolique horizontale.
— Si la limite est infinie, on dit que l'on a une branche parabolique verticale.
— Si on trouve une limite a non nulle, on étudie alors la limite de $y(t) - ax(t)$:

1. si cette quantité tend vers l'infini, on dit que l'on a une branche parabolique de direction $y = ax$.
2. si on trouve une limite b alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe. On peut étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote en étudiant localement le signe de $y(t) - ax(t) - b$ (on passe généralement par un développement limité).

Exemple – Étude complète d'un cas particulier

Étudier et représenter la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$

— Domaine de définition : $\mathscr{D}_x = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\mathscr{D}_y = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

— Domaine d'étude : Pas de restriction apparente.

— Variations : x et y sont dérivables sur leur domaine de définition comme quotients de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On trouve alors, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$x'(t) = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2} \text{ et } y'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}.$$

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	‖		$-$		‖		$-$		
$x(t)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{2}{3}$	↘	0
$y(t)$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

On constate qu'il y a deux points réguliers à tangente horizontale, $M(0) = (0,0)$ et $M(2) = (2/3, 4)$, et aucun point stationnaire.

— Branches infinies

Lorsque t tend vers $\pm\infty$, le tableau montre que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote et on lit la position de la courbe par rapport à cette droite.

De même, lorsque t tend vers -1, on voit d'après le tableau que la droite d'équation $y = -1/2$ est asymptote à la courbe.

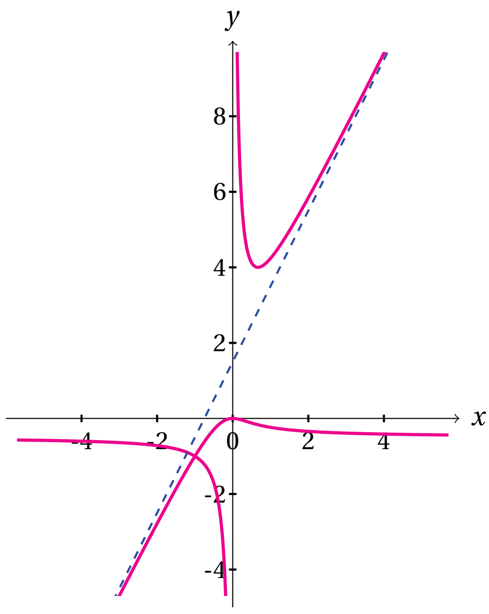
Il reste à étudier ce qu'il se passe au voisinage de $t = 1$.

$$\frac{y(t)}{x(t)} = t(t+1) \xrightarrow[t\to 1]{} 2 \text{ et } y(t) - 2x(t) = \frac{t(t+2)}{t+1} \xrightarrow[t\to 1]{} \frac{3}{2}$$

Ainsi, la droite d'équation $y = 2x + \dfrac{3}{2}$ est asymptote à la courbe.

De plus, $y(t) - 2x(t) - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(t-1)(2t+3)}{t+1}$ est du signe de $t-1$ au voisinage de 1, ce qui nous donne la position de la courbe par rapport à son asymptote.

— Et pour finir, le graphe correspondant :



REPRÉSENTATION DE LA COURBE PARAMÉTRÉE

IV | Propriétés métriques des courbes planes

On considère deux applications $x, y : I \to \mathbb{R}$ et on note alors f l'application définie sur I par $f(t) = (x(t), y(t))$. On suppose f de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour $k \geqslant 1$ et on suppose désormais la courbe paramétrée régulière.

A – Rectification des courbes planes paramétrées

1 – Longueur d'une courbe

Définition 8.24 : Longueur d'une courbe

Soient $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$. La longueur de la courbe paramétrée définie par f est le réel positif :

$$L = \int_a^b \left\| f'(t) \right\| \mathrm{d}t = \int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\| = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{d}t$$

Le point de vue du physicien – Considérons la distance entre les deux points de la courbe $M(t)$ et $M(t+\mathrm{d}t)$. $\mathrm{d}t$ étant considéré comme infiniment petit, l'arc $M(t)M(t+\mathrm{d}t)$ peut être perçu comme un segment dont la longueur vaudrait $\left\|\overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)}\right\| = \left\| f(t+\mathrm{d}t) - f(t) \right\| = \left\| f'(t) \right\| \mathrm{d}t$. Il ne reste donc plus qu'à sommer les contributions, pour t parcourant $[a, b]$. La longueur ainsi définie correspond donc bien à l'idée intuitive que l'on pouvait s'en faire.

Exemple

Quelle est la longueur d'un cercle de rayon 1 ?

Il suffit pour cela de considérer le paramétrage $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ du cercle de centre O et de rayon 1.

Il vient :

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$$

Mais que se passe-t-il si l'on change de paramétrage ? La longueur reste-t-elle bien identique ?

Posons $t = \varphi(u)$ où φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective. $f(t) = f(\varphi(u)) = g(u)$. Les deux courbes paramétrées $f : I \to \mathbb{R}^2$ et $g : \varphi^{-1}(I) \to \mathbb{R}^2$ ont alors même support. En supposant φ, pour ce calcul, strictement croissante (résultat identique dans le cas décroissant), on a alors en posant $c = \varphi^{-1}(a)$ et $d = \varphi^{-1}(b)$:

$$\int_a^b \left\| f'(t) \right\| \mathrm{d}t \underset{t=\varphi(u)}{=} \int_c^d \left\| f'(\varphi(u)) \right\| \varphi'(u)\, \mathrm{d}u \underset{\varphi \text{ croissante}}{=} \int_c^d \left\| \varphi'(u) \times f'(\varphi(u)) \right\| \mathrm{d}u = \int_c^d \left\| g'(u) \right\| \mathrm{d}u$$

La longueur est donc une propriété intrinsèque de la courbe et ne dépend pas du paramétrage choisi.

Exercice 4

Quelle est la longueur de la courbe représentative de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0, \ln(2)]$?

2 – Abscisse curviligne

Définition 8.25 : Abscisse curviligne

On appelle abscisse curviligne de f d'origine $t_0 \in I$ la fonction $s : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in I \quad s(t) = \int_{t_0}^t \left\| f'(t) \right\| \mathrm{d}t = \int_{t_0}^t \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\| = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, \mathrm{d}u$$

L'abscisse curviligne représente donc la longueur *algébrique* de la courbe entre les points $M(t_0)$ et $M(t)$.

Imaginons que l'on puisse déplier la courbe sans l'étirer de telle sorte que l'on obtienne une droite, $s(t)$ représente alors l'abscisse du point $M(t)$ relativement à l'origine et l'orientation choisie ; d'où le terme d'abscisse curviligne, à savoir « abscisse sur une courbe ».

Comme la longueur, on peut montrer que l'abscisse curviligne ne dépend pas du paramétrage choisi (à l'orientation près).

Exemple

> Reprenons l'exemple de la fonction définie par $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ dont le support est le cercle trigonométrique. L'abscisse curviligne d'origine 0 est alors donné par :
>
> $$\forall t \in \mathbb{R} \quad s(t) = \int_0^t \sqrt{(-\sin u)^2 + (\cos u)^2}\,\mathrm{d}u = t$$

On remarquera que $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\| \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\| > 0$ puisque la courbe est supposée régulière.

La fonction s est donc continue, strictement croissante et réalise ainsi une bijection de I dans $s(I)$. Sa réciproque $s^{-1} : s(I) \to I$ est même dérivable (puisque s' ne s'annule pas). En posant $s = s(t)$, on obtient ainsi un nouveau paramétrage de la courbe, dit paramétrage par l'abscisse curviligne.

Il est particulièrement intéressant car :

– en tout point, le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}$ est de norme 1 :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\| \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} \qquad \text{donc} \qquad \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} \right\| = 1$$

– le choix du paramètre $s(t)$ à la place de t semble pertinent puisque $s(t)$ a une véritable signification géométrique ce qui n'est pas forcément le cas pour t.

En cinématique, la formule du changement de paramètre qui relie le temps à l'abscisse curviligne est appelée loi horaire du mouvement.

B – Repère de Frenet et courbure

On suppose toujours la courbe régulière.

1 – Repère de Frenet

La remarque précédente montre que la tangente est en tout point $M(t)$ dirigée par le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \neq \vec{0}$.

On peut alors considérer les vecteurs :

- $\overrightarrow{T}(t) = \dfrac{1}{\left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \right\|} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)$ appelé vecteur tangent (ce vecteur est unitaire) ;
- $\overrightarrow{N}(t)$, vecteur directement orthogonal à $\overrightarrow{T}(t)$, appelé vecteur normal (ce vecteur est unitaire).

Définition 8.26 : Repère de Frenet

On appelle repère de Frenet au point $M(t)$ le repère orthonormé direct $(M(t), \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$.

Là encore, on montre que le repère de Frenet ne dépend pas (à l'orientation près) du paramétrage retenu.

De plus, en changeant de paramétrage,

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{T}$$

2 – Courbure

Théorème / Définition 8.27 : Courbure

En tout point, les vecteurs $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}$ et $\overrightarrow{N}$ sont colinéaires.

On appelle alors courbure de f la fonction γ définie par : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma \cdot \overrightarrow{N}$.

Démonstration

$\left\|\overrightarrow{T}\right\|^2 = \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{T} = 1$ donc en dérivant, il vient $2\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} \cdot \overrightarrow{T} = 0$. Ce qui implique que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}$ et $\overrightarrow{T}$ sont orthogonaux en tout point. Ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}$ et $\overrightarrow{N}$ sont bien colinéaires. ■

Le vecteur $\overrightarrow{T}$ étant unitaire, on peut montrer le résultat suivant qui est admis, conformément au programme :

Théorème 8.28

On suppose que $f : I \to \mathbb{R}^2$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.
Il existe alors une application α de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telle que :

$$\forall t \in I \quad \overrightarrow{T}(t) = \cos\alpha(t) \cdot \vec{\imath} + \sin\alpha(t) \cdot \vec{\jmath} = \begin{pmatrix} \cos\alpha(t) \\ \sin\alpha(t) \end{pmatrix} \quad (\star)$$

Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut alors écrire :

$$\forall t \in I \quad \overrightarrow{N}(t) = -\sin\alpha(t) \cdot \vec{\imath} + \cos\alpha(t) \cdot \vec{\jmath} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha(t) \\ \cos\alpha(t) \end{pmatrix} \quad (\star\star)$$

Exprimons maintenant la courbure γ en fonction de α à l'aide des relations $(\star)$ et $(\star\star)$:

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \cdot \overrightarrow{N}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix} = -\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \cdot \overrightarrow{T}$$

Nous venons de prouver les formules dites de Frenet.

Proposition 8.29 : Courbure et formules de Frenet

– La courbure γ est donnée par la formule $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$

– Les formules de Frenet :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \cdot \overrightarrow{N} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \cdot \overrightarrow{T}$$

Ce lien avec α nous permet de mieux comprendre l'interprétation géométrique de la courbure :

- Dire que γ est positive revient à dire que α est croissante : la courbe « tourne à gauche » (selon l'orientation du plan euclidien choisie). De même, dire que γ est négative revient à dire que α est décroissante : la courbe « tourne à droite »
- Plus la courbure est grande en valeur absolue, plus la croissance/décroissance de α est rapide : la courbe « prend un virage serré ». *A contrario*, plus la courbure est petite en valeur absolue, plus la croissance/décroissance de α est lente : la courbe « prend un virage ample ».

Exercice 5

Que peut-on dire de la courbure d'un cercle en tout point ?

Exemple

Considérons la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Remarquons qu'il s'agit d'une simple parabole d'équation $2y = x^2$.
Déterminons la courbure au point $M(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}$$

La courbe est bien régulière puisque $\sqrt{1+t^2} \neq 0$.
Après calcul, on trouve $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t}(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{(1+t^2)}\overrightarrow{N}(t)$. De plus,

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \times \gamma \times \overrightarrow{N} \quad \text{où} \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \right\| = \sqrt{1+t^2}$$

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) \times \gamma(t) = \frac{1}{(1+t^2)} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \gamma(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}$$

3 – Rayon et centre de courbure

Définition 8.30 : Point birégulier

Le point de paramètre t est dit birégulier si $\gamma(t) \neq 0$.

Définition 8.31 : Rayon de courbure, centre de courbure

On suppose que le point M de paramètre t est birégulier.

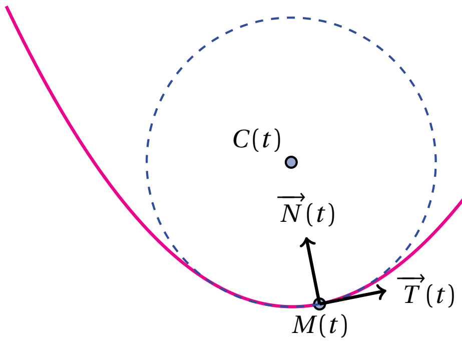
- On appelle rayon de courbure en M de paramètre t le réel $R(t) = \dfrac{1}{\gamma(t)}$.
- On appelle centre de courbure en M de paramètre t le point $C(t)$ défini par la relation :

$$C(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t)$$

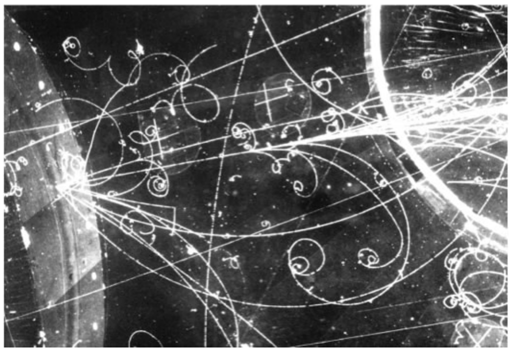
- On appelle cercle de courbure (ou cercle osculateur) en M de paramètre t le cercle de centre $C(t)$ et de rayon $|R(t)|$.

Remarquons que si l'on suppose la courbe birégulière, la courbure ne peut s'annuler donc reste de signe constant. Il en va de même pour le rayon de courbure, même si celui-ci est négatif. D'où la valeur absolue en précaution dans la définition du cercle de courbure.

La définition du cercle de courbure montre que celui-ci passe par le point $M(t)$. Mais il ne s'agit pas de n'importe quel cercle, c'est celui qui épouse au mieux la courbe en tout point. Nous admettrons ce résultat mais observons néanmoins ce phénomène sur un exemple :



Les chambres à bulles ont été utilisées au milieu du XX^{ème} siècle comme détecteurs de particules. Réalisées à l'aide d'une cavité contenant un certain liquide maintenu à température constante, elles permettent d'observer le mouvement d'une particule donnée à l'aide des bulles formées le long de sa trajectoire. Les clichés étaient alors développés et agrandis afin de mesurer (à la main) le rayon de courbure des trajectoires pour en déduire la vitesse puis l'énergie des particules.



CLICHÉ D'UNE CHAMBRE À BULLES (D. GLASER 1952)

V | Enveloppe d'une famille de droites et développée

A – Enveloppe d'une famille de droites

I désignera par la suite un intervalle de $\mathbb{R}$ supposé non vide et non réduit à un point.

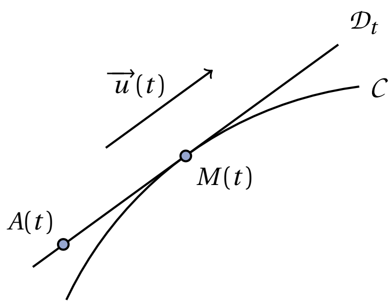
Définition 8.32 : Enveloppe

On considère une famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ définies chacune par la donnée d'un point $A(t)$ et d'un vecteur directeur $\vec{u}(t)$. On suppose que les applications A et $\vec{u}$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.
On appelle enveloppe de $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ toute courbe Γ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que les droites de la famille $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ soient exactement les tangentes de Γ, c'est-à-dire :

- Quel que soit $t \in I$, $\mathcal{D}_t$ est tangente à Γ.
- La courbe Γ admet en chaque point une tangente et celle-ci est une des droites de la famille $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$.

Supposons que la famille de droite $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ admette une enveloppe notée Γ. Alors,

$$M \in \Gamma \text{ si et seulement si } \left| \begin{array}{l} \text{(1) il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } M \in \mathcal{D}_t \\ \text{(2) la droite } \mathcal{D}_t \text{ est tangente à } \Gamma \text{ en } M \end{array} \right.$$



Il vient alors :

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\iff \quad \exists t \in I \quad M = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t) \\
(2) \quad &\iff \quad \det\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}, \vec{u}(t)\right) = 0 \quad \iff \quad \det\big(A'(t) + \lambda'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)\big) = 0 \\
&\iff \quad \det\big(A'(t), \vec{u}(t)\big) + \lambda'(t)\det(\vec{u}(t), \vec{u}(t)) - \lambda(t)\det\big(\vec{u}(t), \vec{u}'(t)\big) = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, si $\det(\vec{u}(t), \vec{u}'(t)) \neq 0$, on trouve :

$$\lambda(t) = \frac{\det(A'(t), \vec{u}(t))}{\det(\vec{u}(t), \vec{u}'(t))} \qquad (\star)$$

La fonction λ est alors de classe $\mathscr{C}^1$. On a donc bien trouvé une courbe (paramétrée par $t \mapsto A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ qui répond au problème.

Réciproquement, supposons que pour tout $t \in I$, $\det(\vec{u}(t), \vec{u}'(t)) \neq 0$. On peut alors définir une courbe paramétrée Γ par $t \mapsto A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ où $\lambda(t)$ vérifie la relation $(\star)$. Les calculs précédents montrent alors que Γ est une enveloppe de la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$. Ainsi, sous la condition précédente, l'enveloppe de droites existe et est unique.

On ne retiendra pas la formule $(\star)$ par cœur, on la retrouvera dans chaque exercice à partir d'un raisonnement géométrique.

Exemple – Cardioïde vue comme une enveloppe de cordes de cercle

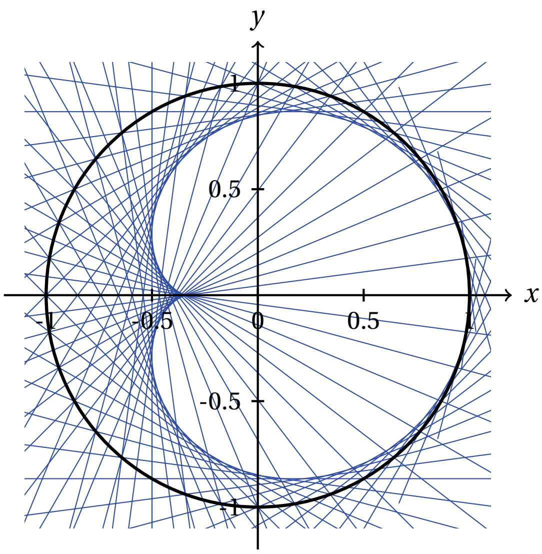
On considère la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in]0,2\pi[}$ passant par les points $A(\cos(t), \sin(t))$ et $B(\cos(2t), \sin(2t))$. Déterminer l'enveloppe de cette famille de droites.

- Chaque droite $\mathcal{D}_t$ passe par le point $A(t)$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} \cos(2t) - \cos(t) \\ \sin(2t) - \sin(t) \end{pmatrix}$
- Sous réserve d'existence de l'enveloppe notée Γ, on a :

$$M(t) \in \Gamma \quad \iff \quad M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t) \quad \text{et} \quad \det\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}, \vec{u}(t)\right) = 0$$

Comme nous l'avons vu, cette dernière condition nous conduit à :

$$\lambda(t) = \frac{\begin{vmatrix} -\sin(t) & \cos(2t) - \cos(t) \\ \cos(t) & \sin(2t) - \sin(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(2t) - \cos(t) & -2\sin(2t) + \sin(t) \\ \sin(2t) - \sin(t) & 2\cos(2t) - \cos(t) \end{vmatrix}} = \frac{1 - \cos(t)}{3 - 3\cos(t)} = \frac{1}{3}$$



CARDIOÏDE ET ENVELOPPE DE CORDES DE CERCLE

Remarquons que le dénominateur ne s'annulait que pour $t \equiv 0\ [2\pi]$, ce qui n'est pas possible d'après l'énoncé.

Donc Γ est paramétrée par :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cos(t) + \cos(2t) \\ 2\sin(t) + \sin(2t) \end{pmatrix}$$

B – Développée

Définition 8.33 : Développée

La développée d'une courbe régulière est l'ensemble de ses centres de courbure.

Théorème 8.34 : Caractérisation

La développée d'une courbe régulière est l'enveloppe des normales à la courbe.

Démonstration

En utilisant les notations de la partie précédente, on peut écrire :

$$C(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t)$$

Cela montre que la développée est l'enveloppe de la famille de droites $(\mathcal{D}_t)$ où $\mathcal{D}_t$ représente la droite passant par $M(t)$ et dirigée par $\overrightarrow{N}(t)$. C'est précisément l'ensemble des normales à la courbe ! ■

Exemple

Revenons à l'exemple de la parabole paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

– Recherchons la développée en déterminant les centres de courbure de la parabole.
  Nous avions précédemment calculé la courbure en tout point :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}$$

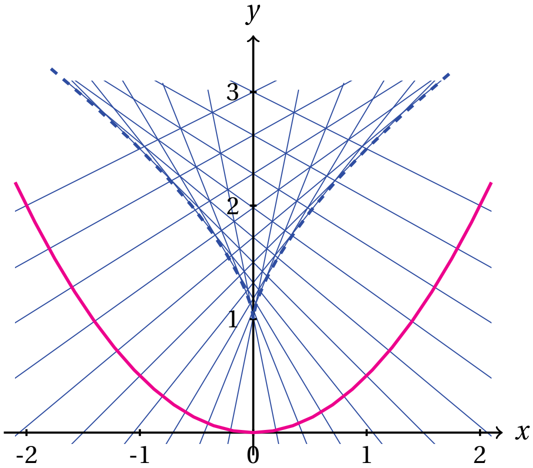
  Ceci prouve que la courbe est birégulière. Les centres de courbure ont pour coordonnées :

$$C(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \dfrac{t^2}{2} \end{pmatrix} + (1+t^2)^{3/2} \times \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^3 \\ \dfrac{3}{2}t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

– Recherchons la développée en déterminant l'enveloppe des normales à la parabole.
  La normale au point $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}$. L'enveloppe est alors paramétrée par : $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \dfrac{t^2}{2} \end{pmatrix} + \lambda(t)\begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}$ avec :

$$\lambda(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -t & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = 1 + t^2$$

  On retrouve bien le même résultat.



VI | Courbes définies par une équation implicite

Comme on l'a vu précédemment, il est souvent compliqué de construire une courbe à partir d'une équation implicite. On essaiera généralement de trouver un paramétrage d'une telle courbe ou, si possible, d'obtenir une équation cartésienne de la forme $y = f(x)$ ou bien $x = f(y)$.

On peut cependant facilement obtenir une équation de la tangente en un point à l'aide du résultat suivant.

Proposition 8.35 : Tangente pour une courbe plane

Si $M_0(x_0, y_0)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $f(x, y) = 0$ tel que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq \vec{0}$, alors, dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormal, la courbe $\mathscr{C}$ admet en M_0 une tangente d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0$$