2 Déterminant

« M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde »
Charles Gustave Jacobi (1830)

Plan de cours

Le déterminant ayant été étudié en première année, nous nous contenterons ici de rappeler les définitions et propriétés essentielles de celui-ci sans s'étendre sur la démonstration de certains résultats. Ce chapitre se veut résolument pratique, le but étant d'apprendre à calculer – dans les cas simples – différents déterminants à l'aide d'opérations élémentaires ou via des développements par rapport à une ligne ou une colonne.

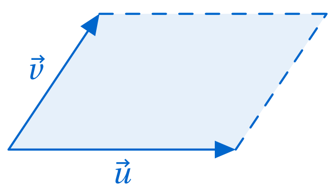
I | Définition géométrique du déterminant en dimension 2 et 3

A – Déterminant de deux ou trois vecteurs

1 – Déterminant dans le plan

Le plan euclidien est supposé muni d'une base orthonormée directe notée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On rappelle que le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \sin(\vec{u}, \vec{v}) \text{ si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls, } \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ sinon.}$$



Parallélogramme engendré par deux vecteurs

$\det(\vec{u}, \vec{v})$ n'est rien d'autre que l'aire *algébrique* du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ainsi, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Le parallélogramme engendré est alors « aplati », son aire est nulle.

On démontre alors le résultat suivant :

Théorème 2.1

$(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

Proposition 2.2

Le déterminant vérifie les propriétés suivantes :

— bilinéarité : quels que soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\det(\lambda\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = \lambda\det(\vec{u}, \vec{w}) + \det(\vec{v}, \vec{w})$ et $\det(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{u}, \vec{w})$;

— antisymétrie : quels que soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$.

Théorème 2.3 : Expression du déterminant dans une base orthonormale directe

Si on note (x, y) (resp. (x', y')) les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) dans la base *orthonormale directe* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x y' - y x'$$

Démonstration

Si $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$, alors :

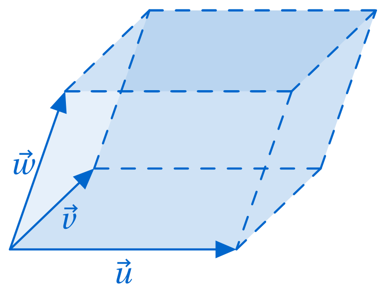
$$\begin{aligned}
\det(\vec{u}, \vec{v}) &= \det(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}, x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}) \\
&= x\det(\vec{\imath}, x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}) + y\det(\vec{\jmath}, x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}) \\
&= x x'\det(\vec{\imath}, \vec{\imath}) + x y'\det(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) + y x'\det(\vec{\jmath}, \vec{\imath}) + y y'\det(\vec{\jmath}, \vec{\jmath}) \\
&= (x y' - y x')\det(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = x y' - y x'
\end{aligned}$$

■

2 – Déterminant dans l'espace

L'espace euclidien est supposé muni d'une base orthonormée directe notée $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On rappelle que le déterminant de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, également appelé produit mixte, est défini par :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$



Parallélépipède engendré par trois vecteurs

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est rien d'autre que le volume *algébrique* du parallélépipède engendré par $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$. De plus, $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ si et seulement si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. Le parallélépipède engendré est alors « aplati », son volume est nul.

On démontre alors le résultat suivant :

Théorème 2.4

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.

Proposition 2.5

Le déterminant vérifie les propriétés suivantes :

— trilinéarité : l'application est linéaire par rapport à chacune de ses variables ;

— antisymétrie : permuter deux vecteurs revient à multiplier le déterminant par -1.

Théorème 2.6 : Expression du déterminant dans une base orthonormale directe

Si on note (x, y, z), (x', y', z') et (x'', y'', z'') les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base *orthonormale directe* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - x''y'z - y''z'x - z''x'y$$

B – Déterminant d'une matrice carrée

On appelle déterminant d'une matrice 2×2 ou 3×3 le déterminant de ses vecteurs colonnes considérés comme des éléments de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Théorème 2.7

Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\det(M) = ad - bc \neq 0$.

Le résultat est encore vrai pour une matrice d'ordre 3 (et plus généralement pour un entier naturel n non nul quelconque).

Démonstration

Posons $N = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et considérons le produit matriciel MN :

$$MN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2$$

- ⋆ Si $ad - bc \neq 0$, alors M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- ⋆ Si $ad - bc = 0$ alors $MN = 0_2$ et M ne peut pas être inversible. En effet, si c'était le cas, on aurait $N = M^{-1}MN = M^{-1}0_2 = 0_2$, ce qui conduirait à $N = 0_2$, donc à $M = 0_2$, absurde puisque la matrice nulle n'est pas inversible !

■

II | Généralisation de la notion de déterminant

A – Déterminant d'une matrice carrée

$\mathbb{K}$ désignera dans tout le reste du chapitre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème / Définition 2.8

On admet qu'il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée déterminant, telle que :
- — le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes ;
- — l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 ;
- — le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.

On la note det.

Pour $n = 2$, on vérifiera que l'application $\det : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$ convient. On laisse le soin aux lecteurs de s'assurer de l'unicité à titre d'exercice.

Proposition 2.9

Le déterminant d'une matrice qui possède deux colonnes identiques est nul.

Proposition 2.10

Si les colonnes d'une matrice sont liées, alors le déterminant de la matrice est nul.

Démonstration

Posons $A = (C_1|C_2|\cdots|C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où C_j représente la j^e colonne de A.

Les colonnes étant liées, il existe un entier k tel que $C_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_j C_j$.

Par multilinéarité du déterminant,

$$\det(A) = \det(C_1|C_2|\cdots|C_k|\cdots|C_n) = \det\left(C_1|C_2|\cdots|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_j C_j|\cdots|C_n\right)$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_j \det\big(C_1|C_2|\cdots|C_j|\cdots|C_n\big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \times 0 = 0$$

Proposition 2.11

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Exemple

On a $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det(2I_3) = 2^3 \det(I_3) = 8$.

On admet les propriétés suivantes :

Théorème 2.12

$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \det(A^T) = \det(A) \quad$ et $\quad \det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.

Théorème 2.13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Démonstration

Montrons seulement l'implication. Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $AA^{-1} = I_n$ donc $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$.
Ainsi, $\det A \neq 0$. On prouve même au passage que :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

■

Corollaire 2.14

Deux matrices semblables ont même déterminant.

Démonstration

Si A et B sont semblables, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$, donc :

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$$

■

B – Calcul pratique du déterminant

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $A_{i,j}$ la matrice obtenue en ôtant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Définition 2.15 : Mineurs et cofacteurs

On appelle :
- mineur relatif à $a_{i,j}$ le scalaire $\det A_{i,j}$.
- cofacteur de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j} \det A_{i,j}$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Alors $A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.
Le mineur relatif à $a_{2,3}$ vaut $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6$, le cofacteur associé $(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$.

Théorème 2.16 : Développement par rapport à une ligne / à une colonne

En conservant les mêmes notations,
- $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \det A = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) a_{i,j}$ (développement / ligne i)
- $\forall j \in [\![1, n]\!] \quad \det A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})}_{\text{cofacteur}} a_{i,j}$ (développement / colonne j)

Exemple

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A)$.

En développant par rapport à la deuxième ligne, on trouve $\det(A) = -48$.

Déterminant d'une matrice triangulaire :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times \begin{vmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times a_{2,2} \times \dots \times a_{n,n}$$

Pour calculer certains déterminants, on pourra opérer sur les lignes et les colonnes pour obtenir des déterminants de matrices diagonales ou triangulaires. Attention, les opérations du pivot de Gauss modifient le déterminant ! (valable pour les lignes et les colonnes)

- $C_i \longleftrightarrow C_j$: on multiplie le déterminant par -1.
- $C_i \leftarrow \lambda C_i$: on multiplie le déterminant par λ.
- $C_i \leftarrow C_i + \sum\limits_{j\neq i} \lambda_j C_j$: le déterminant reste identique.

Exemple

On pose $B = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(B)$.

Par opérations successives sur les lignes et les colonnes, on trouve $\det(B) = -36$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. On remarquera que $\det(A)$ est un « polynôme en les coefficients de la matrice ».

En particulier, si $A = \begin{pmatrix} x & 4 & 2x+1 \\ 2 & x & 3 \\ -3x & 0 & 5 \end{pmatrix}$ alors $\det(A)$ est un polynôme en x (de degré au plus 3).

Théorème 2.17 : Déterminant par blocs

Soit M une matrice triangulaire par blocs, c'est-à-dire de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $M \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.
Alors, $\det(M) = \det(A)\det(C)$.

Dans la plupart des cas, $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.

Démonstration

$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{qp} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & O_{pq} \\ O_{qp} & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ O_{qp} & I_q \end{pmatrix}$.

Exercice 1

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$.

C – Déterminant d'un endomorphisme

E désigne par la suite un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 2.18 : Déterminant d'un endomorphisme

Le déterminant d'un endomorphisme f de E est celui de sa matrice dans une base quelconque. On le note $\det f$.

Théorème 2.19

- $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.
- Si $f, g \in \mathscr{L}(E)$, alors $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$.
- $f \in \mathcal{GL}(E)$ si et seulement si $\det(f) \neq 0$.

Pour calculer le déterminant d'un endomorphisme, on se ramènera toujours à un calcul de déterminant de matrice.

D – Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 2.20

Soient une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E et une base $\mathscr{B}$ de E. On appelle déterminant de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ le déterminant de la matrice représentative de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathscr{B}$. On le note $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$.

On admet alors le théorème suivant.

Théorème 2.21

Soit $\mathscr{B}$ une base quelconque de E.

- $(u_1, \dots, u_n)$ liée $\Longleftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0$;
- $(u_1, \dots, u_n)$ libre $\Longleftrightarrow (u_1, \dots, u_n)$ base de $E \Longleftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$.

E – Synthèse

Théorème 2.22

Soient $\mathscr{B}(e_1, \dots, e_n)$, une base de E, f un endomorphisme de E et M sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ bijective} \quad &\Longleftrightarrow \quad M \text{ inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{rg}(M) = n \\
&\Longleftrightarrow \quad \det(M) = \det(f) \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est une base de E} \\
&\Longleftrightarrow \quad \det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \neq 0
\end{aligned}$$