Déterminant

Travaux dirigés #05

Exercice 1 — Calculer les déterminants suivants.

$$A=\begin{vmatrix}1+i & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 2+3i & 1 & 3\end{vmatrix}\quad B=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1 & 4\\ 3 & 5 & -3 & 9\\ -1 & 4 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

Exercice 2 — Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants.

$$A=\begin{vmatrix}a-b-c & 2a & 2a\\ 2b & b-a-c & 2b\\ 2c & 2c & c-a-b\end{vmatrix}$$

$$B=\begin{vmatrix}1 & 0 & a & a^2\\ 0 & 1 & b & b^2\\ 1 & 0 & c & c^2\\ 0 & 1 & d & d^2\end{vmatrix}\quad C=\begin{vmatrix}-a & b & c & d\\ b & -a & d & c\\ c & d & -a & b\\ d & c & b & -a\end{vmatrix}$$

Exercice 3 — Déterminant de Vandermonde et applications

1. Soient $x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$. On appelle déterminant de Vandermonde le réel défini par :
$$V(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$
Prouver que $V(x_1,\dots,x_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$.
2. On considère n réels $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ disctincts.
Montrer que la famille $(x\mapsto e^{\alpha_i x})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.
3. Démontrer qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ prenant des valeurs données en n points donnés distincts.

Exercice 4 — Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$\left|\begin{array}{l}\forall i\in[\![1,n]\!],\ a_{i,i}=2\\ \forall i\in[\![1,n-1]\!],\ a_{i,i+1}=a_{i+1,i}=1\\ a_{i,j}=0 \text{ partout ailleurs}\end{array}\right.$$

Calculer le déterminant de la matrice A.

Exercice 5 — Calculer les déterminants suivants :

$$A=\begin{vmatrix}x & 1 & 2 & 3\\ 1 & x & 2 & 3\\ 1 & 2 & x & 3\\ 1 & 2 & 3 & x\end{vmatrix}\quad B=\begin{vmatrix}1 & \cos(x_1) & \cos(2x_1)\\ 1 & \cos(x_2) & \cos(2x_2)\\ 1 & \cos(x_3) & \cos(2x_3)\end{vmatrix}\quad C_n=\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1 & a\\ \vdots & \iddots & \iddots & 1\\ 1 & \iddots & \iddots & \vdots\\ a & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$D_n=\begin{vmatrix}a & b & \cdots & b\\ b & a & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & b\\ b & \cdots & b & a\end{vmatrix}\quad E_n=\begin{vmatrix}a & b & \cdots & b\\ c & a & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & b\\ c & \cdots & c & a\end{vmatrix}\quad F_n=\begin{vmatrix}1 & a & \cdots & a^{n-1}\\ a & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a\\ a^{n-1} & \cdots & a & 1\end{vmatrix}$$

Exercice 6 — Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & n & \cdots & n\\ n & 2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & n\\ n & \cdots & n & n\end{vmatrix}\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & \lambda_1\\ \vdots & \iddots & \lambda_2 & 0\\ a_{n-1,n} & \iddots & \iddots & \vdots\\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}a_1 & \cdots & \cdots & a_1\\ \vdots & a_2 & \cdots & a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}a+b & ab & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b\end{vmatrix}\quad \Delta_5=\begin{vmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ \vdots & n & \ddots & \ddots & \vdots\\ 3 & \vdots & \ddots & 1 & 2\\ 2 & 3 & \cdots & n & 1\end{vmatrix}$$

Exercice 7 — Calculer les déterminants suivants :

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$B_n = \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} \qquad C_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & (0) \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ (0) & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 8 — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$.
Montrer que $\det(M)$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

Exercice 9 — Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique. Calculer $\det(A)$.

Exercice 10 — Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $D \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $CD = DC$.
Montrer que :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

Exercice 11 — Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ et $J, M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définies par :

$$M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} \; ; \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

On note $\overline{J}$ la matrice dont tous les coefficients sont les conjugués de ceux de J.

1. Calculer les produits $J\overline{J}$ et $JM\overline{J}$.
2. En déduire le déterminant de M sous forme factorisée.
3. Dans cette question, x, y et z sont supposés réels. Décrire l'ensemble :

$$\mathscr{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ M(x,y,z) \text{ non inversible}\right\}$$

Exercice 12 — Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = -I_n$. Montrer que n est pair.

Exercice 13 — Soient $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $C^2 + D^2 = CD$ et $CD - DC$ inversible.
Montrer que $(C + jD)(C + j^2 D) = -j(CD - DC)$ puis que n est un multiple de 3.

Exercice 14 — Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Montrer que la famille de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P_i(X) = (X + a_i)^n$, est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 15 — On se place dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct.

1. Montrer que trois points $M_i(x_i, y_i)$ sont alignés si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2. a) Montrer que toute équation de cercle est de la forme $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Réciproquement, à quelle condition cette équation décrit-elle un cercle ?
   b) Montrer que quatre points $M_i(x_i, y_i)$ sont cocycliques ou alignés si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 16 — Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on note D le déterminant de la famille (P, XP, P', XP', X^2P') dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

1. Montrer que $D = 0$ si et seulement s'il existe deux polynômes non nuls $U \in \mathbb{R}_1[X]$ et $V \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $PU = P'V$.
2. Montrer que $D = 0$ si et seulement si P admet une racine multiple.
3. Calculer D pour $P = X^3 + pX + q$ avec $p, q \in \mathbb{R}$.
4. Trouver a pour que $P = X^3 - 3aX - 3a + 1$ ait une racine multiple.

CCINP ∅