13 | Endomorphismes d'un espace euclidien

« Il faut donc que l'élève se mette en état, d'une part, de pouvoir écrire en analyse tous les mouvements qu'il peut concevoir dans l'espace, et, de l'autre, de se représenter perpétuellement dans l'espace le spectacle mouvant dont chacune des opérations analytiques est l'écriture »

Gaspard Monge – Cours de géométrie descriptive (1746–1818)

Plan de cours

L'objectif de se chapitre est d'étudier les endomorphismes remarquables d'un espace euclidien comme les automorphismes orthogonaux et les endomorphismes symétriques.

I | Représentation matricielle dans une base orthonormale

On considère dans tout ce chapitre un espace euclidien $(E,(\cdot|\cdot))$ de dimension notée n. Soit $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E, c'est-à-dire que pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, $(e_i|e_j)=\delta_{i,j}$.

$$\forall x\in E,\quad x=(x|e_1)e_1+\cdots+(x|e_n)e_n=\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i$$

Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. Déterminons sa matrice M dans la base $\mathscr{B}$.

Pour tout $j\in E$, $u(e_j)\in E$ et $u(e_j)=\sum_{i=1}^{n}(u(e_j)|e_i)e_i$ donc $M=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\begin{pmatrix}(u(e_1)|e_1) & \dots & (u(e_n)|e_1)\\ \vdots & & \vdots\\ (u(e_1)|e_n) & \dots & (u(e_n)|e_n)\end{pmatrix}$.

Notons C_j la $j^{\text{ième}}$ colonne de M. On a $C_j=(u(e_i)|u(e_j))$ et donc $M^TM=\big((u(e_i)|u(e_j))\big)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$.

II | Isométries vectorielles et matrices orthogonales

A – Matrices orthogonales

Soit $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ deux bases orthonormales de E.

On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

$$e'_j=\sum_{i=1}^{n}(e'_j|e_i)e_i \text{ et } P_{i,j}=(e'_j|e_i)$$

De même, $e_j=\sum_{i=1}^{n}(e_j|e'_i)e'_i$ donc $(P^{-1})_{i,j}=(e'_i|e_j)$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{matrix}\\ \begin{matrix} e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_n\end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}=P$$

On remarque que pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $(P^{-1})_{i,j}=P_{j,i}$ donc $P^{-1}=P^T$. Ainsi, $P^TP=PP^T=I_n$.

Définition 13.1 : Matrice orthogonale

On appelle matrice orthogonale toute matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^TM=MM^T=I_n$.
On appelle groupe orthogonal l'ensemble des matrices orthogonales noté $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$.

Théorème 13.2

- Si M est orthogonale alors M est inversible et $M^{-1} = M^T$.
- Si M est orthogonale alors $\det(M) = \pm 1$.

Démonstration

- Immédiat d'après la définition.
- $\det(M^T M) = \det(M)^2 = 1$ donc $\det(M) = \pm 1$. ■

Définition 13.3

On appelle groupe spécial orthogonal l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant $+1$.
On le note $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$ ou $O_n^+(\mathbb{R})$.

Proposition 13.4

- $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.
- Si $A, B \in O_n(\mathbb{R})$ (resp. $SO_n(\mathbb{R})$) alors $AB \in O_n(\mathbb{R})$ (resp. $SO_n(\mathbb{R})$).
- Si $A \in O_n(\mathbb{R})$ (resp. $SO_n(\mathbb{R})$) alors $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ (resp. $SO_n(\mathbb{R})$).

Démonstration

On a déjà prouvé que les matrices orthogonales sont inversibles.

- $\forall M_1, M_2 \in O_n(\mathbb{R}), (M_1M_2)^T M_1M_2 = M_2^T M_1^T M_1 M_2 = M_2^T M_2 = I_n$ donc $M_1M_2 \in O_n(\mathbb{R})$.
- $\forall M \in O_n(\mathbb{R}), M^{-1} = M^T$ et $(M^T)^T(M^T) = MM^T = I_n$ donc $M^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

Idem pour $SO_n(\mathbb{R})$. ■

- $M \in O_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow \det(M) = \pm 1$ mais la réciproque est fausse. Ex. : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $M \in O_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow M^T \in O_n(\mathbb{R})$.

Une matrice de passage entre deux bases orthonormales est orthogonale. Réciproquement, une matrice orthogonale peut être vue comme une matrice de passage entre deux bases orthonormales.

Proposition 13.5 : Caractérisation des matrices orthogonales

Une matrice est orthogonale si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- ses vecteurs colonnes forment une famille orthonormale.
- ses vecteurs lignes forment une famille orthonormale.

Démonstration

$$\begin{aligned} M \in O_n(R) \iff M^T M = I_n &\iff \forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad (M^T M)_{i,j} = \delta_{i,j} \\ &\iff \forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j} = C_i^T C_j = \delta_{i,j} \end{aligned}$$

Le résultat est le même pour M^T donc pour les lignes de la matrice M. ■

Exemple

$$M = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$$

B – Orientation de l'espace, produit vectoriel et produit mixte

1 – Orientation de l'espace

Soient E un espace euclidien, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormales de E. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. On sait que P est orthogonale, c'est-à-dire qu'elle vérifie $P^T P = I_n$ donc $\det P = \pm 1$.

Définition 13.6 : Orientation de l'espace

On dit que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ définissent la même orientation ssi $\det P = 1$.
Orienter l'espace consiste à choisir arbitrairement une base orthonormale de E. Toutes celles qui définissent la même orientation seront dites directes. Les autres indirectes.

Par convention, les bases orthonormales directes de $\mathbb{R}^3$ sont celles qui respectent la règle des trois doigts (ou règle du tire-bouchon).

2 – Produit mixte

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien orienté et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale directe de E.

Définition 13.7 : Produit mixte

Soient $x_1, \ldots, x_n$ n vecteurs de E. On appelle produit mixte de ces n vecteurs le scalaire :

$$\det(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = [x_1, \ldots, x_n]$$

Il est indépendant de la base orthonormale $\mathscr{B}$ choisie.

Démonstration

Soit $\mathscr{B}'$ une autre base orthonormale directe de E.

$$\det_{\mathscr{B}'}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{car} \quad \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \det(P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}) = +1$$

On peut interpréter géométriquement le produit mixte :

- dans $\mathbb{R}^2$: $[\vec{u}, \vec{v}]$ est l'aire algébrique du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- dans $\mathbb{R}^3$: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est le volume algébrique du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

3 – Produit vectoriel

On suppose ici que $\dim(E) = 3$ et on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de E.

Définition 13.8 : Produit vectoriel

Soit $x, y \in E$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

On peut définir le vecteur noté $x \wedge y$ comme le vecteur de coordonnées : $\begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$

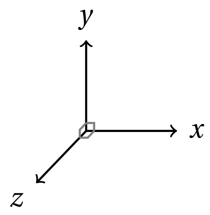
Proposition 13.9

- $x \wedge y \perp x$ et $x \wedge y \perp y$.
- $x \wedge y = 0_E$ si et seulement si (x, y) est liée.
- $(x \wedge y | z) = \det(x, y, z) = [x, y, z]$.

On peut en fait montrer qu'il existe un unique vecteur u tel que :

$$\forall z \in E,\ (u|z) = \det(x, y, z)$$

On le note alors $x \wedge y$.



Théorème 13.10 : Propriétés du produit vectoriel

Soient x, y et z trois vecteurs de E.

- Si x et y ne sont pas colinéaires, $(x, y, x \wedge y)$ est une base directe de E.
- Si (x, y) est une famille orthonormale, $(x, y, x \wedge y)$ est une base orthonormale directe de E.
- Identité de Lagrange : $(x|y)^2 + \|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$.
- Double produit vectoriel : $x \wedge (y \wedge z) = (x|z)y - (x|y)z$. *(1 2 3 = 1 3 2 - 1 2 3)*

Si (x, y) est orthonormale, $x \wedge y$ est l'unique vecteur z telle que (x, y, z) soit une b.o.n. directe de E.

C – Isométrie vectorielle

1 – Définition et propriétés

Définition 13.11 : Isométrie vectorielle

1. Soit f un endomorphisme de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :
   - f conserve la norme : $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$.
   - f conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E,\ (f(x)|f(y)) = (x|y)$.

   On dit alors que f est un endomorphisme orthogonal ou une isométrie vectorielle de E.
2. On appelle groupe orthogonal de E et on note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Démonstration

- Supposons que f conserve le produit scalaire. Soit $x \in E$.
  $\|f(x)\|^2 = (f(x)|f(x)) = (x|x) = \|x\|^2$ donc f préserve la norme.
- Supposons que f conserve la norme. Soit $x, y \in E$.
  On utilise l'identité de polarisation :

$$\begin{aligned}(f(x)|f(y)) &= \frac{1}{4}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)-f(y)\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = (x|y)\end{aligned}$$

f préserve donc le produit scalaire. ■

Isométrie signifie *même mesure* et le terme orthogonal provient du fait que $x \perp y \Longrightarrow f(x) \perp f(y)$.

Exercice 1

Donner un exemple d'isométrie vectorielle de E.
Une projection orthogonale est-elle une isométrie vectorielle ?

Proposition 13.12 : Bijectivité d'une isométrie vectorielle

Une isométrie vectorielle est bijective, c'est un automorphisme.

Démonstration

$(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base orthonormale de E car :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!],\quad (f(e_i)|f(e_j))=(e_i|e_j)=\delta_{i,j}$$

L'image d'une base est une base donc f est un automorphisme de E. ■

Proposition 13.13

- Si $f,g\in O(E)$ alors $f\circ g\in O(E)$.
- Si $f\in O(E)$ alors $f^{-1}\in O(E)$.

Théorème 13.14

Soit F un sous-espace vectoriel stable par $f\in O(E)$. Alors $F^\perp$ est stable par f.

Démonstration

- Supposons que pour tout $x\in F$, $f(x)\in F$. Soit $y\in F^\perp$.
  $(x|y)=0$ donc $(f(x)|f(y))=0$. $f(x)\in F$. Cela signifie-t-il pour autant que $f(y)\in F^\perp$? Non !
- Soit $z\in F$ quelconque. Montrons que $(f(y)|z)=0$.
  Comme $f_{|F}$ est bijective, il existe $x\in F$ tel que $z=f(x)$. $(z|f(y))=(x|y)=0$ donc $f(y)\in F^\perp$. ■

Exercice 2

Déterminer le spectre d'une isométrie vectorielle. Que dire de ses sous-espaces propres ?

Théorème 13.15 : Caractérisation d'une isométrie vectorielle 1

Un endomorphisme est orthogonal ssi l'image d'une base orthonormale est une base orthonormale.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Déjà vu : $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base orthonormale de E car $(f(e_i)|f(e_j))=(e_i|e_j)=\delta_{i,j}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E.
Supposons que $\mathscr{B}'=(f(e_1),\dots,f(e_n))$ soit une base orthonormale de E.
Pour tout $x\in E$, $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ et $f(x)=\sum_{i=1}^n x_if(e_i)$ par linéarité. $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont des b.o.n. donc,

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^n x_i^2=\|f(x)\|^2 \text{ (théorème de Pythagore)}$$

f conserve la norme donc $f\in O(E)$. ■

Théorème 13.16 : Caractérisation d'une isométrie vectorielle 2

Un endomorphisme est orthogonal ssi sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale.

Démonstration

Soit $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E et $\mathscr{B}'=(f(e_1),\dots,f(e_n))$. Posons $M=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

$$\begin{aligned} f\in O(E) &\iff \mathscr{B}' \text{ est une base orthonormale de } E\\ &\iff M \text{ est la matrice de passage d'une b.o.n. à une b.o.n.} \iff M\in O_n(\mathbb{R})\end{aligned}$$

Corollaire 13.17

Si $f \in O(E)$ alors $\det(f) = \pm 1$.

Définition 13.18

- On appelle isométrie positive (resp. isométrie négative) une isométrie de dét. 1 (resp. de dét. -1).
- On appelle groupe spécial orthogonal le groupe des isométries positives noté $SO(E)$ ou $O^+(E)$.

L'image d'une base orthonormale directe est une base orthonormale directe si et seulement si l'application est une isométrie positive.

2 – Symétries orthogonales

Définition 13.19 : Symétrie orthogonale

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a $E = F \oplus F^\perp$.
On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.
Si F est un hyperplan de E, on parle alors de réflexion.

Rappels :

1. $s \circ s = \mathrm{id}_E$ donc $s^{-1} = s$. Si $x = \underbrace{x_1}_{\in F} + \underbrace{x_2}_{\in F^\perp}$ alors $s(x) = x_1 - x_2$.
2. $F = E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $F^\perp = E_{-1} = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
3. $\mathrm{Mat}(s) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ dans une base adaptée, avec $p = \dim(F)$.
4. $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$ et $\chi_s = (X-1)^p (X+1)^{n-p}$. Cas particuliers : $\pm \mathrm{id}_E$.

Théorème 13.20

Une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

Théorème 13.21 : Caractérisation des symétries orthogonales

Une symétrie vectorielle est une symétrie orthogonale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

Démonstration

Supposons que s soit une symétrie vectorielle.
Soit M la matrice de s dans une base orthonormale. On a $M^2 = I_n$ donc $M^{-1} = M$.
s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est de plus orthogonale, c'est-à-dire si et seulement si $M \in O_n(\mathbb{R})$ (base orthonormale). Cela s'écrit encore $M^{-1} = M^T = M$. ■

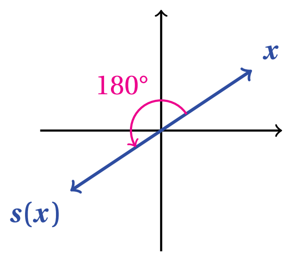
3 – Symétries orthogonales du plan ($E = \mathbb{R}^2$)

⋆ $\dim F = 0$ c'est-à-dire $F = \{0_E\}$.

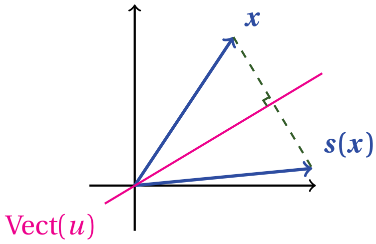
Alors $s = -\mathrm{id}_E$ et dans n'importe quelle base $\mathscr{B}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(isométrie directe)}$$

C'est également une rotation d'angle π.



- $\dim F = 1$ c'est-à-dire $F = \mathrm{Vect}(u)$ avec u non nul.



On a une réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(u)$.
Si $\mathscr{B} = (u, v)$ est une base orthonormale de E,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(isométrie indirecte)}$$

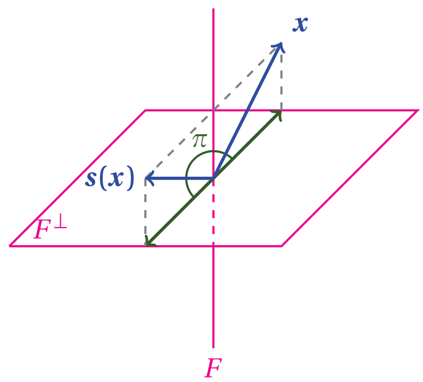
- $\dim F = 2$ c'est-à-dire $F = \mathbb{R}^2$.
  $s = \mathrm{id}_E$ et dans n'importe quelle base $\mathscr{B}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (isométrie directe)

Exercice 3

> Identifier l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

4 – Symétries orthogonales de l'espace ($E = \mathbb{R}^3$)

- $\dim F = 0$, $s = -\mathrm{id}_E$ (isométrie indirecte)
- $\dim F = 1$, c'est-à-dire $F = \mathrm{Vect}(u)$.

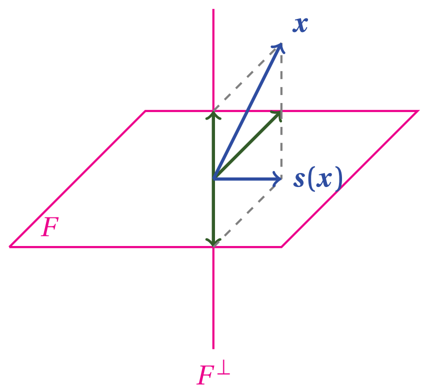


Rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ et d'angle π, c'est un retournement.

Dans une certaine base $\mathscr{B}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(isométrie directe)}$$

- $\dim F = 2$, c'est-à-dire $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.



s est la réflexion par rapport au plan F.

Dans une certaine base $\mathscr{B}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(isométrie indirecte)}$$

- $\dim F = 3$, c'est-à-dire $F = \mathbb{R}^3$. $s = \mathrm{id}_E$.

Quelle que soit la dimension de E, une réflexion est toujours une isométrie indirecte.

Exemple

> Identifier l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :
>
> $$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$
>
> $M \in O_2(\mathbb{R})$ et $M^T = M$: M est la matrice d'une symétrie orthogonale.
> Il s'agit d'une rotation d'axe $u = \mathrm{Ker}(M - I_3) = \mathrm{Vect}(1, 4, 1)$ et d'angle π.

5 – Classification des isométries planes

On cherche dans cette partie à identifier et à interpréter géométriquement les éléments de $O(\mathbb{R}^2)$ et $SO(\mathbb{R}^2)$.
Soit $f \in O(\mathbb{R}^2)$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$.

On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$M^T M = I_2 \iff \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = I_2 \iff \begin{cases} a^2+c^2 = 1 \\ b^2+d^2 = 1 \\ ab+cd = 0 \end{cases}$$

$a^2+c^2 = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} a = \cos\theta \\ c = \sin\theta \end{cases}$ et $b^2+d^2 = 1 \iff \exists \varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} b = \cos\varphi \\ d = \sin\varphi \end{cases}$.

À ce stade, $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\varphi \\ \sin\theta & \sin\varphi \end{pmatrix}$.

De plus, $ab+cd = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = \cos(\theta-\varphi)$.
Donc $ab+cd = 0 \iff \theta - \varphi = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \iff \varphi = \theta + \varepsilon\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

$$\cos\varphi = \cos\left(\theta + \varepsilon\frac{\pi}{2}\right) = -\varepsilon\sin\theta\ ; \quad \sin\varphi = \sin\left(\theta + \varepsilon\frac{\pi}{2}\right) = \varepsilon\cos\theta$$

D'où $M \in O_2(\mathbb{R}) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}$. On a alors, $\det(M) = \varepsilon$.

Théorème 13.22 : Isométries du plan

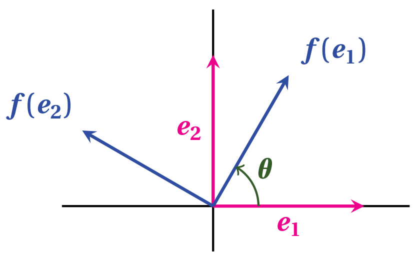
- $M \in O_2(\mathbb{R}) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \sin\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix}$.
- $M \in SO_2(\mathbb{R}) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

⋆ Isométries positives : $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Les isométries positives du plan sont les rotations (d'angle θ).

$$\chi_M = X^2 - 2\cos\theta X + 1 = (X - \mathrm{e}^{i\theta})(X - \mathrm{e}^{-i\theta})$$

Il n'y a des valeurs propres réelles que pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.



⋆ Isométries négatives : $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Comme $M \neq \pm I_2$, les isométries négatives du plan sont les réflexions.

Nature de l'isométrie	déterminant	spectre	s.e. propres	matrice dans une bon qcq
identité	1	$\{1\}$	$E_1 = \mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- identité	1	$\{-1\}$	$E_{-1} = \mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
rotation d'angle θ ($\neq 0, \pi$)	1	$\varnothing$	/	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(u)$	-1	$\{-1, 1\}$	$E_1 = \mathrm{Vect}(u), E_{-1} = E_1^{\perp}$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES DU PLAN

6 – Classification des isométries de l'espace

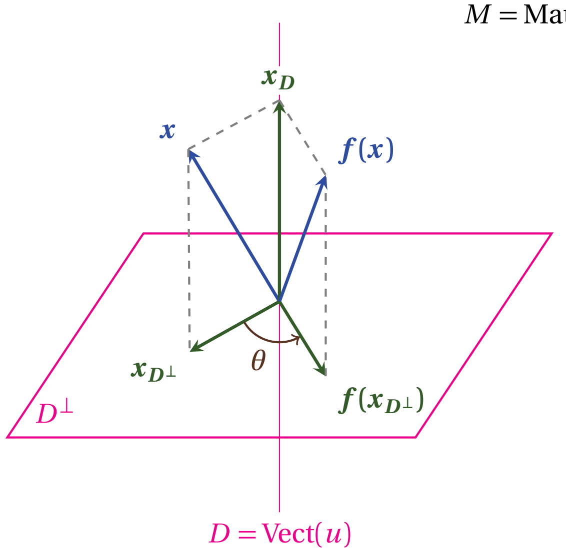
On cherche dans cette partie à identifier et à interpréter géométriquement les éléments de $O(\mathbb{R}^3)$ et $SO(\mathbb{R}^3)$. Soit $f \in O(\mathbb{R}^3)$. On a :

$$\chi_f = X^3 - \mathrm{Tr}(f)X^2 + \cdots - \det(f)$$

Comme χ_f est un polynôme de degré 3, il admet au moins une racine réelle.
De plus, les racines de χ_f (valeurs propres de f) sont nécessairement de module 1. Ceci prouve que l'un des réels 1 ou -1 est nécessairement racine de χ_f.
De plus, χ_f admet soit une racine réelle et deux racines complexes conjuguées de module 1
soit trois racines réelles (± 1)

- ⋆ Isométries positives ($f \in SO(\mathbb{R}^3)$)
Dans ce cas, $\det f = 1$. Les 3 racines de χ_f sont donc $1, \mathrm{e}^{i\theta}, \mathrm{e}^{-i\theta}$. (éventuellement multiples)
Soit u un vecteur propre associé à la valeur propre 1 : $f(u) = u$. On pose $D = \mathrm{Vect}(u)$.
D est stable par f et donc $D^\perp$ stable par f.
Dans une base orthonormale $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $E = D \oplus D^\perp$, on a :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$



Comme $M^T M = I_3$, on a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.

De plus, $\det M = 1$ donc $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$.

Ainsi, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

C'est une rotation d'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$ (ou dirigée par u) et d'angle θ. Le signe de θ dépend de l'orientation de $\mathrm{Vect}(u)$. Le choix de $-u$ comme vecteur propre associé à 1 aurait conduit à $-\theta$. Mais comment déterminer θ ?

On peut déjà remarquer que $\mathrm{Tr}(M) = 1 + 2\cos\theta$ ce qui nous permet de déterminer θ au signe près.
On choisira pour u un vecteur unitaire. Soit $v \in D^\perp$ unitaire et $w = u \wedge v$.
(u, v, w) est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$. On a alors :

$$\begin{aligned} [u, v, f(v)] &= \det(u, v, f(v)) = (u \wedge v | f(v)) = (w | \cos(\theta) \cdot v + \sin(\theta) \cdot w) \\ &= \sin(\theta) \cdot (w|w) = \sin(\theta) \cdot \|w\|^2 = \sin(\theta) \end{aligned}$$

- Dans la pratique, comme on connaît $\cos\theta$, seul le signe de $\sin\theta$ nous intéresse.
On peut donc se contenter de vecteurs non unitaires et calculer le signe du produit mixte.
- Cas particuliers : Si $\theta = 0$ alors $f = \mathrm{id}_E$. Si $\theta = \pi$ alors $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
f est alors une rotation d'angle π par rapport à $\mathrm{Vect}(u)$, c'est un retournement (ou demi-tour).

Plan d'identification :

Soit f l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice A.
- On vérifie que $A^T A = I_3$, *i.e.* $A \in O_3(\mathbb{R})$. f est une isométrie vectorielle.
- On vérifie que $\det(A) = 1$.
f est une isométrie positive, c'est donc une rotation d'axe dirigée par x et d'angle θ.
- On détermine l'axe $\mathrm{Vect}(u)$ de la rotation en résolvant $AX = X$
- L'angle de la rotation est donné par :
$\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta)$ et $\sin(\theta) = [u, v, f(v)]$ avec $\|u\| = \|v\| = 1$ et $v \in \mathrm{Vect}(u)^\perp$.

Exemple

Soit $A=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&\sqrt{6}\\1&3&-\sqrt{6}\\-\sqrt{6}&\sqrt{6}&2\end{pmatrix}$. Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

(a) $A^TA=I_3$ et $\det A=1$. C'est donc une rotation.

(b) $AX=X\iff X\in\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. On pose alors $u=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. L'axe de la rotation est $\mathrm{Vect}(u)$.

(c) $\mathrm{Tr}(A)=2$ donc $\cos\theta=\pm\dfrac{\pi}{3}$ et on montre que $\sin\theta\geqslant 0$. Donc $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

⋆ Isométries négatives ($f\in O^-(\mathbb{R}^3)$)
Dans ce cas, $\det f=-1$. Les 3 racines de χ_f sont donc $-1,\mathrm{e}^{i\theta},\mathrm{e}^{-i\theta}$. (éventuellement multiples)
On a donc :

$$M=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

f est donc la composée d'une rotation d'axe dirigé par x et d'angle θ et d'une réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(x)^\perp$. Ces deux isométries commutent car les matrices commutent.

Cas particuliers :

- Si $\theta=\pi$ alors $f=-\mathrm{id}_E$.
- Si $\theta=0$ alors $M=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. f est la réflexion d'hyperplan $\mathrm{Vect}(x)^\perp$.

Plan d'identification :
Soit f l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice A.

- On vérifie que $A^TA=I_3$, *i.e.* $A\in O_3(\mathbb{R})$. f est une isométrie vectorielle.
- On vérifie que $\det(A)=-1$. $A\in O_3^-(\mathbb{R})$ et f est la composée d'une rotation d'axe dirigée par u et d'angle θ et d'une réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.
- On détermine l'axe $\mathrm{Vect}(u)$ de la rotation en résolvant $AX=-X$ (cas 2).
- L'angle de la rotation est donné par :
  $\mathrm{Tr}(A)=-1+2\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)=[u,x,f(x)]$ avec $\|x\|=\|u\|=1$ et $x\in\mathrm{Vect}(u)^\perp$.
  Si $\theta=0$, f est une simple réflexion.

Exemple

Soit $B=-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&-1&2\\2&-2&1\\1&2&2\end{pmatrix}$. Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à B.

(i) $B^TB=I_3$ et $\det B=-1$.
C'est donc la composée d'une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(x)$ et d'une réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(x)^\perp$.

(ii) $BX=-X\iff X\in\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$. On pose alors $x=\dfrac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$. L'axe de la rotation est Vect x.

(iii) $\mathrm{Tr}(B)=\frac{2}{3}$ donc $\theta=\pm\arccos\left(\frac{5}{6}\right)$ et on montre que $\sin\theta=-\frac{\sqrt{11}}{6}$. Donc $\theta=-\arccos\left(\frac{5}{6}\right)$.

Nature de l'isométrie	déterminant	spectre	matrice dans une certaine b.o.n.
identité	1	$\{1\}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
demi-tour	1	$\{1,-1\}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$
rotation d'angle θ $(\neq 0,\pi)$	1	$\{1\}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$
- identité	-1	$\{-1\}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$
réflexion	-1	$\{1,-1\}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
composée rotation/réflexion	-1	$\{-1\}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES DE L'ESPACE

III | Endomorphismes symétriques et matrices symétriques réelles

A – Définition et propriétés

Définition 13.23 : Endomorphisme symétrique

On appelle endomorphisme symétrique tout endomorphisme f de E vérifiant :

$$\forall x,y\in E,\quad (f(x)|y)=(x|f(y))$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Les endomorphismes symétriques sont également qualifiés d'endomorphismes *auto-adjoints*.

Proposition 13.24

$\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Parmi les symétries vectorielles, on trouve les projecteurs orthogonaux. On dispose même d'un résultat un peu plus précis.

Proposition 13.25

Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est symétrique.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que p est un projecteur orthogonal sur un sous-espace F. Soient $x,y\in E$. Comme $x=x_1+x_2$ et $y=y_1+y_2$ avec $x_1,y_1\in F$ et $x_2,y_2\in F^\perp$,

$$(p(x)|y)=(x_1|y_1+y_2)=(x_1|y_1)\quad\text{et}\quad(x|p(y))=(x_1+x_2|y_1)=(x_1|y_1)$$

On a donc bien $(p(x)|y)=(x|p(y))$. Ainsi, $p\in\mathcal{S}(E)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit p un projecteur symétrique sur F parallèlement à G. Soient $(x,y)\in F\times G$.

$$(x|y)=(p(x)|y)=(x|p(y))=(x|0_E)=0$$

On a donc $F\perp G$, donc $G=F^\perp$. ■

Une dernière propriété de stabilité est à connaître car fort utile !

Proposition 13.26

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.

Démonstration

Supposons F stable par $f \in \mathcal{S}(E)$. Soit $x \in F^\perp$.

$$\forall y \in F, \quad (f(x)|y) = (x|f(y)) = 0 \quad \text{car } x \in F^\perp \text{ et } f(y) \in F$$

Donc $f(x) \in F^\perp$ et $F^\perp$ est bien stable par f. ■

B – Lien avec les matrices symétriques réelles

Proposition 13.27 : Caractérisation des endomorphismes symétriques 1

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.
Un endomorphisme f est symétrique si et seulement si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $(f(e_i)|e_j) = (e_i|f(e_j))$.

Démonstration

L'implication est évidente, justifions la réciproque. Soit $x, y \in E$. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$.

$$(f(x)|y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) | \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (f(e_i)|e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (e_i|f(e_j)) = \cdots = (x|f(y))$$

■

Théorème 13.28 : Caractérisation des endomorphismes symétriques 2

Un endomorphisme f est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

Démonstration

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ avec $f \in \mathscr{L}(E)$.

On a $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (f(e_j)|e_i) e_i$ donc $m_{i,j} = (f(e_j)|e_i)$, d'où $m_{j,i} = (f(e_i)|e_j) = (e_j|f(e_i))$.

$$M^T = M \iff \forall i, j \in [\![1, n]\!] \ \ m_{i,j} = m_{j,i} \iff \forall i, j \in [\![1, n]\!] \ \ (f(e_j)|e_i) = (e_j|f(e_i)) \iff f \in \mathcal{S}(E)$$

■

C – Réduction d'un endomorphisme symétrique

Proposition 13.29

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont orthogonaux.

Démonstration

Soient $f \in \mathcal{S}(E)$ et λ, μ deux valeurs propres distinctes de f. Soient maintenant $x \in E_\lambda(f)$ et $y \in E_\mu(f)$.

$$(f(x)|y) = \lambda(x|y) = (x|f(y)) = \mu(x|y)$$

Comme $\lambda \neq \mu$, $(x|y) = 0$. Ainsi, $E_\lambda(f) \perp E_\mu(f)$. ■

Allons un peu plus loin dans la réduction des endomorphismes symétriques.

Lemme 13.30

Tout endomorphisme symétrique du plan est diagonalisable dans une base orthonormale.

Démonstration

Supposons E de dimension 2 et considérons un endomorphisme symétrique f. Dans une base orthonormale, la matrice de f est symétrique, donc de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
$\chi_f = X^2 - (a+c)X + (ac - b^2)$. Son discriminant $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$ est positif ou nul. Deux possibilités :

- χ_f admet deux racines réelles distinctes, auquel cas f est diagonalisable. Les deux droites propres sont orthogonales donc la propriété est démontrée.
- χ_f admet une racine double mais alors $a = c$ et $b = 0$ puisque $\Delta = 0$, donc $f = a\mathrm{id}_E$. f est là encore diagonalisable dans une base orthonormale. ■

Afin d'étendre ce résultat à un espace de dimension finie quelconque, justifions que l'on peut toujours se ramener aux dimensions 1 et 2.

Lemme 13.31

Tout endomorphisme en dimension finie admet au moins une droite ou un plan stable.

Démonstration

Notons π_f le polynôme minimal d'un endomorphisme f donné.

- Si π_f admet un facteur réel de degré 1, f admet une valeur propre réelle donc un vecteur propre associé noté u. $\mathrm{Vect}(u)$ est alors stable par f.
- Sinon, on peut toujours factoriser π_f sous la forme :

$$\pi_f = P_1 \times \cdots \times P_r \quad \text{où } P_i \text{ est un polynôme unitaire de degré 2 à coefficients réels}$$

  Par définition, $\pi_f(f) = P_1(f) \circ \cdots \circ P_r(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et aucun des $P_i(f)$ ne peut être bijectif. Fixons alors $i \in [\![1, r]\!]$ quelconque et $x \neq 0_E$ tel que $x \in \mathrm{Ker}\, P_i(f)$. Si $P_i = X^2 + aX + b$, $f^2(x) + af(x) + bx = 0_E$, soit $f^2(x) = -af(x) - bx$ et $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f. Comme $x \neq 0$, c'est une droite ou un plan. ■

Théorème 13.32 : Théorème spectral

Si f est un endomorphisme symétrique de E alors f est diagonalisable dans une base orthonormale. Autrement dit, il existe une base orthonomale formée de vecteurs propres de f.

Démonstration

On raisonne par récurrence forte sur $\dim(E) = n$. On considère $f \in \mathcal{S}(E)$.

- **Initialisation –** Le résultat est vrai pour $n \leqslant 2$ comme montré précédemment.
- **Hérédité –** Soit F un plan ou une droite stable par f. Rappelons que $F^\perp$ est stable par f. Les deux endomorphismes induits $f_{|F}$ et $f_{|F^\perp}$ sont symétriques donc diagonalisables par hypothèse de récurrence. Comme $E = F \oplus F^\perp$, il ne reste plus qu'à concaténer les deux bases orthonormales de F et $F^\perp$ constituées de vecteurs propres de f. ■

On en déduit la version matricielle du théorème spectral.

Théorème 13.33 : Théorème spectral

Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle est diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale :

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \quad P^{-1}MP = P^TMP \text{ diagonale.}$$

Exemple

La matrice $M = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle donc diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale. On trouve $\chi_M = (X-3)(X-6)(X-9)$ et $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.
On peut déterminer le dernier vecteur propre à l'aide du produit vectoriel des deux premiers.
On remarquera que P est la matrice d'une rotation (passage d'une b.o.n.d. à une b.o.n.d).

Le théorème ne s'applique pas lorsque les coefficients de la matrice sont complexes.

Exemple

$M = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$. $\chi_M = X^2$. Si M était diagonalisable, M serait nulle.