Endomorphismes d'un espace euclidien

Travaux dirigés #13

Partie A – Isométries

Exercice 1 — Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère le sous-espace F défini par les équations : $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y+2z=0. \end{cases}$

1. Déterminer $F^\perp$.
2. On note s la symétrie orthogonale par rapport à F.
   Déterminer sa matrice dans la base canonique.

Exercice 2 —

1. On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique.
   Soit p la projection orthogonale sur :
   $$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\}$$
   Déterminer la matrice de p dans la base canonique puis la distance de $(1, 0, 1, 1)$ à F.
2. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique.
   Soit s la symétrie orthogonale par rapport à :
   $$F = \{(x, y, z), x + 2y - z = 0, 2x - y = 0\}$$
   Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 3 — On considère un espace euclidien orienté E de dimension 2.

1. Que peut-on dire de la composée de deux rotations ?
2. Que peut-on dire de la composée de deux réflexions ?
3. Que peut-on dire de la composée d'une rotation et d'une réflexion ?
4. Montrer que toute rotation s'écrit comme la composée de deux réflexions.
5. Montrer que ce dernier résultat se généralise en dimension 3.

Exercice 4 — Déterminer la nature géométrique des endomorphismes dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -11 & 9 & 3\sqrt{6} \\ 9 & 13 & -\sqrt{6} \\ 3\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 14 \end{pmatrix} \quad C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & -4 \\ -8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 — On note $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation d'axe orienté par $\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 6 — Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $A \in \mathscr{O}(3)$?
2. Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique serait A.

Exercice 7 — Soient E un espace euclidien et u un vecteur unitaire de E. Pour α réel, on définit φ_α sur E par $\varphi_\alpha(x) = x + \alpha \langle x|u \rangle u$.

1. Vérifier que φ_α est un endomorphisme symétrique de E puis déterminer ses éléments propres.
2. Peut-on avoir φ_α orthogonal ? Caractériser alors géométriquement φ_α.

Exercice 8 — Soit E un espace euclidien de dimension 3.

1. Soit r la rotation d'axe D (dirigé et orienté par un vecteur unitaire ω) et d'angle θ. Montrer que pour tout vecteur x de E,
   $$r(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)\omega \wedge x + (1 - \cos(\theta))(x|\omega)\omega$$
2. Soit $\mathscr{B} = (i, j, k)$ une base orthonormale directe de E. Écrire la matrice A relativement à la base $\mathscr{B}$ de la rotation d'axe D dirigé et orienté par le vecteur $i + j + k$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 9 — Soient E un espace vectoriel euclidien, $u \in E$ non nul et $\varphi \in \mathcal{O}(E)$. On note σ la réflexion par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.

1. Montrer que $\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ est une réflexion et préciser ses caractéristiques géométriques.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante φ et σ commutent-elles ?
3. Déterminer toutes les applications ψ de $\mathcal{O}(E)$ qui vérifient :

$$\forall \varphi \in \mathcal{O}(E), \quad \psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$$

Exercice 10 — Soit E un espace euclidien de dimension $N \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{O}(E)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \dfrac{1}{n}\left(\mathrm{id}_E + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

1. Vérifier que $E = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.
2. En déduire la nature de l'endomorphisme $g = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} p_n$.

Partie B – Endomorphismes symétriques et antisymétriques

Exercice 11 — Soit E un espace euclidien et $s \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $(\mathrm{Ker}\, s)^\perp = \mathrm{Im}\, s$.

Exercice 12 — *Endomorphismes antisymétriques*
Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad (f(x)|x) = 0$$

1. Montrer que f est antisymétrique : $\quad \forall (x, y) \in E^2,\ (f(x)|y) = -(x|f(y))$
2. Que dire de la matrice représentative de f dans une base orthonormale ?
3. Déterminer le spectre de f. À quelle condition f est-elle diagonalisable ?
4. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^\perp$. En déduire la matrice de f dans une base orthonormale adaptée à $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 13 — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que $\mathrm{Ker}(A^T A) = \mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{rg}(A^T A) = \mathrm{rg}(A)$.

Exercice 14 — Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AA^T A = I_n$?

Exercice 15 — Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} PQ$ et $\varphi : P \mapsto (1 - X^2)P'' - 2XP'$. Montrer que $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ et déterminer $\mathrm{Sp}(\varphi)$.

Exercice 16 — Soient $E = \mathbb{R}^3$ et u un vecteur non nul. Montrer que l'endomorphisme $x \mapsto u \wedge (u \wedge x)$ est symétrique. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 17 — *Adjoint*
Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et on note u^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A^T.

1. Montrer que u^* est l'unique endomorphisme de E tel que :

$$\forall x, y \in E, \quad (u(x)|y) = (x|u^*(y))$$

2. Déterminer le noyau et l'image de u^* en fonction de ceux de u.
3. Déterminer u^* lorsque $u \in \mathcal{S}(E)$ et $u \in \mathcal{O}(E)$.
4. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*.

Exercice 18 — *Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs*
Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E.

- u est dit symétrique si : $\forall x, y \in E \ \ (u(x)|y) = (x|u(y))$;
- u est dit positif si : $\forall x \in E \ \ (u(x)|x) \geqslant 0$;
- u est dit défini positif si : $\forall x \in E \setminus \{0_E\} \ \ (u(x)|x) > 0$.

1. Traduire matriciellement ces propriétés.
   Les matrices correspondantes seront dites positives et définies positives.
2. Démontrer, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les équivalences :

$$A \text{ positive} \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+ \iff \exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad A = M^T M$$

3. Démontrer les équivalences :

$$A \text{ définie positive} \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^* \iff \exists M \in GL_n(\mathbb{R}) \quad A = M^T M$$

Exercice 19 — Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(S)^{1/n} \leqslant \dfrac{\mathrm{Tr}(S)}{n}$.

Exercice 20 — Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E.
Montrer que l'application $x \mapsto \frac{(u(x)|x)}{\|x\|}$ atteint sur $E \setminus \{0\}$ un minimum et un maximum que l'on exprimera en fonction des valeurs propres de u.

Exercice 21 — Soient E un espace euclidien, A un endomorphisme symétrique défini positif et B un endomorphisme symétrique. On pose :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, y\rangle_A = \langle A^{-1}x, y\rangle$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ est un produit scalaire.
2. Montrer que AB est diagonalisable.
3. Si M est un endomorphisme diagonalisable de E, on note $\lambda_{\min}(M)$ sa plus petite et $\lambda_{\max}(M)$ sa plus grande valeurs propres.
   On note φ l'application définie par :
   $$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \varphi(x) = \frac{\langle Bx, x\rangle}{\langle A^{-1}x, x\rangle}$$
   Montrer que l'image de $E \setminus \{0\}$ par φ est le segment $[\lambda_{\min}(AB), \lambda_{\max}(AB)]$.
4. Montrer que $\lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B) \leqslant \lambda_{\min}(AB) \leqslant \lambda_{\max}(AB) \leqslant \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B)$.

Partie C – Décompositions matricielles

Exercice 22 — *Racine carrée et décomposition polaire*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ les matrices symétriques réelles dont les valeurs propres sont strictement positives.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   a) Établir l'existence de $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$.
   b) Justifier l'unicité de la matrice R à l'aide du lemme des noyaux.
2. Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que $M^T M$ admet une unique racine carrée, notée R.
   b) Montrer que $R \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ puis que $MR^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
   c) Justifier enfin l'existence d'un couple $(\Omega, R) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = \Omega R$.

Exercice 23 — *Décomposition QR*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. On note $\mathscr{B}$ la base constituée des colonnes de A et $\mathscr{B}'$ son orthonormalisée par Gram-Schmidt.
   a) Préciser la forme de la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
   b) Montrer que A peut s'interpréter comme une matrice de passage.
   c) En déduire qu'il existe $(Q, R) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = QR$.
2. Quel intérêt présente une telle décomposition dans la résolution du système linéaire $AX = Y$?
3. *Inégalité d'Hadamard* – Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
   $$\det(M) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|C_i\| \text{ où } C_i \text{ est la } i\text{-ème colonne de } M$$
   Préciser le cas d'égalité.

CCINP Exercices 68, 78.