13 Équations différentielles

« A mathematician is a device for turning coffee into theorems. »
Alfréd Rényi (1921-1970)

Plan de cours

I | Équations différentielles linéaires scalaires

On ne s'intéressera ici qu'aux équations différentielles linéaires d'ordre 1 et d'ordre 2.

A – Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante et l'équation homogène associés :

$$a(t)y' + b(t)y = c(t) \quad (E)$$
$$a(t)y' + b(t)y = 0 \qquad (H)$$

Elle est dite résolue lorsqu'elle est sous la forme $y' + b(t)y = c(t)$.
On suppose que $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ sont continues sur un *intervalle* I de $\mathbb{R}$.

Théorème 13.1 : Problème de Cauchy

Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

En particulier, toute solution d'une équation de la forme $y'(t) + b(t)y(t) = 0$ qui s'annule une fois sur un intervalle donné y est automatiquement entièrement nulle !

Théorème 13.2 : ÉD linéaire d'ordre 1

- L'équation homogène $y' + f(t)y = 0$ admet pour solution générale $t \mapsto \lambda e^{-F(t)}$ où F est une primitive de f sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- L'équation $y' + f(t)y = b(t)$ admet pour solution générale $t \mapsto y_0(t) + \lambda e^{-F(t)}$ où y_0 est une solution particulière de l'équation avec second membre.

Méthode pour retrouver la formule rapidement (à prendre avec des pincettes !)

$$y' = -f(t)y \iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -f(t)y \iff \frac{\mathrm{d}y}{y} = -f(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc, en intégrant chaque membre de l'égalité,

$$\ln y(t) = -F(t) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

et on trouve :

$$y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-F(t)} \quad \text{avec } \lambda = \mathrm{e}^k$$

Corollaire 13.3 : Structure de l'ensemble des solutions

Lorsque $a : I \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I, l'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de (H) est une droite vectorielle.

En effet, d'après ce qui précède et en conservant les mêmes notations,

$$\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^{-F(t)}\right) \text{ et } \mathscr{S}_E = y_0 + \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^{-F(t)}\right)$$

Exercice 1

> Datation au carbone 14
> La matière radioactive perd par unité de temps une proportion constante k de sa masse ce qui conduit à l'équation $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t) = -km(t)$. Sachant que la période [1] du carbone 14 est de 5500 ans et qu'on a retrouvé des ossements d'origine humaine ne contenant que $0,002\%$ de la proportion habituelle, de quand datent les ossements ?

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre, on se ramènera toujours au plan de résolution suivant :

❶ Identification de l'équation.

❷ Mise sous forme résolue en divisant par $a(t)$ sur les intervalles où a ne s'annule pas.
Ex. : $ty' - t^2y + \sin t = 0$. On résoudra l'équation $y' - ty + \dfrac{\sin t}{t} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

❸ Résolution de l'équation homogène : $y' = f(t)y$ avec f continue sur l'intervalle de résolution I.
La solution générale de l'équation homogène est $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{F(t)}$ où F est une primitive de f sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}(t \mapsto \mathrm{e}^{F(t)})$.

❹ Résolution de l'équation avec second membre.
On recherche pour cela une solution particulière y_0 de (E).
S'il n'y a pas de solution évidente, on utilisera la méthode de la variation de la constante en cherchant y sous la forme $y(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^{F(t)}$. En réinjectant y dans l'équation, on obtient une expression de λ' que l'on peut généralement intégrer.
La solution générale de l'équation (E) est $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{F(t)} + y_0(t)$. On a $\mathscr{S}_E = y_0 + \mathscr{S}_H$.
Ex. : Résoudre $y' - xy = x$ en cherchant une solution particulière de deux façons différentes.

❺ Raccordement éventuel des solutions.
Ex. : $y' + a(x)y = b(x)$ avec y_1 solution sur $\mathbb{R}_-^*$ et y_2 solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $y \mapsto \begin{cases} y1(x) \text{ si } x < 0 \\ y_2(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$ est solution de l'équation sur $\mathbb{R}_*$. Elle est solution sur $\mathbb{R}$ si son prolongement par continuité est également dérivable, ce qui nous conduit à deux conditions :

$$\lim_{x\to 0^-} y_1(x) = \lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} y_2(x)$$

$$\lim_{x\to 0^-} y_1'(x) = \lim_{x\to 0^-} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} y_2'(x)$$

❻ Conditions initiales.

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : t y' + |t| y = t^2 \mathrm{e}^{-|t|}$.

- Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$

$$(\mathcal{E}) \iff t y' + t y = t^2 \mathrm{e}^{-t} \iff y' + y = t \mathrm{e}^{-t}$$

On trouve $y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + C_1\right)\mathrm{e}^{-t}$ où $C_1 \in \mathbb{R}$.

- Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$

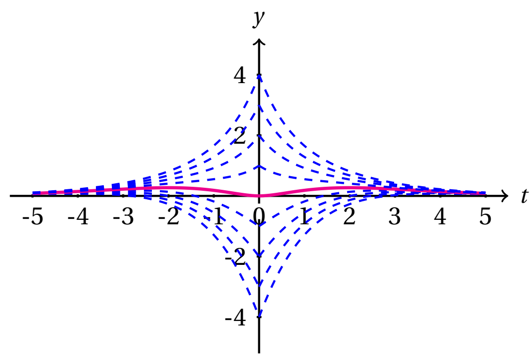
$$(\mathcal{E}) \iff t y' - t y = t^2 \mathrm{e}^{-t} \iff y' - y = t \mathrm{e}^{t}$$

On trouve $y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + C_2\right)\mathrm{e}^{t}$ où $C_2 \in \mathbb{R}$.

- Recollement des solutions

Supposons que y est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\mathcal{E})$. L'application y est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et il existe deux constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad y(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t^2}{2} + C_1\right)\mathrm{e}^{-t} \text{ si } t > 0 \\ \left(\dfrac{t^2}{2} + C_2\right)\mathrm{e}^{t} \text{ si } t < 0 \end{cases}$$



Cela donne *a priori* de très nombreuses solutions ! On peut en visualiser certaines sur le graphe ci-contre.

y étant continue en 0, $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = C_1 = C_2 = \lim\limits_{t\to 0^-} y(t)$. y étant par ailleurs dérivable en 0, $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{y(t) - C_1}{t} = C_1 = -C_1 = \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{y(t) - C_1}{t}$. Donc $C_1 = 0$, on trouve une unique solution $y(t) = \dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-|t|}$.

B – Équations différentielles linéaires d'ordre 2

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante et l'équation homogène associés :

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \quad (E) \qquad \text{et} \qquad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \quad (H)$$

De telles équations apparaissent souvent en physique.

Exemple

Pendule simple : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.
Pour des oscillations faibles, $\sin\theta \approx \theta$, on « peut » considérer que θ vérifie l'équation $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$.

Exemple

Circuit RLC : $\dfrac{q}{C} + R\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + L\dfrac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = U(t)$.

On suppose que $a, b, c, d : I \to \mathbb{R}$ sont continues sur un *intervalle* I de $\mathbb{R}$.

Théorème 13.4 : Problème de Cauchy

Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \\ y(t_0) = y_0 \,;\; y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

On ne s'intéresse dans ce chapitre qu'à la résolution de cette équation pour des coefficients constants. On écrit (E) désormais sous la forme :

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = d(t) \quad (E)$$

Le résultat suivant est démontré dans la partie II.

Théorème 13.5 : Équa. diff. linéaire d'ordre 2 homogène à coeff. constants

On considère l'équation $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$.
On résout l'équation caractéristique $aX^2 + bX + c = 0$ de discriminant associé Δ.

- Si $\Delta > 0$, deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. $y(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 t}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, une racine réelle double r. $y(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^{rt}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$.
  $y(t) = (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t))\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1, l'ensemble des solutions de l'équation $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$ est obtenu en recherchant une solution particulière de cette équation.

Théorème 13.6 : Structure de l'ensemble des solutions

Lorsque $a : I \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I, l'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de (H) est un plan vectoriel. Toute solution de (E) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'' + 3y' + 2y = 0\,; \quad y'' - 2y' + y = 0\,; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

On peut déterminer une solution particulière de (E) lorsque le second membre $d(t)$ est de la forme :

- $d(t) = P(t)$ avec P un polynôme de degré n. On cherche alors une solution sous la forme d'un polynôme Q de même degré que P.
  Ex. : $y'' - 2y' + y = t^2$.
- $d(t) = P(t)\mathrm{e}^{mt}$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$, on cherche y_0 sous la forme $y_0(t) = Q(t)\mathrm{e}^{mt}$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(Q) = \deg(P) + k$, k étant l'ordre de multiplicité de m en tant que racine de l'équation caractéristique.
- $d(t) = \cos(\omega t), \sin(\omega t)$, on passe en complexe et on retrouve le cas précédent [2].

Proposition 13.7 : Principe de superposition

Si y_1 est solution de l'équation $a\,y'' + b\,y' + c\,y = d_1(t)$ et y_2 de l'équation $a\,y'' + b\,y' + c\,y = d_2(t)$ alors $y_1 + y_2$ est solution de l'équation $a\,y'' + b\,y' + c\,y = d_1(t) + d_2(t)$.

Le plan de résolution est exactement le même que celui décrit pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Lorsque l'équation n'est pas à coefficients constants, il n'y a pas de méthode de résolution systématique. Voici cependant quelques techniques à connaître. On se laissera guider par l'énoncé dans la plupart des cas.

- **Recherche de solutions à l'aide de séries entières**

Exemple

Résolvons l'équation $(x^2 + x)y'' + (3x + 1)y' + y = 0$ en posant $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ puis en dérivant terme à terme la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence (inconnu pour le moment).

2. Si $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, $y_0(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.

Exemple (suite)

On trouve, en injectant dans l'équation,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 3na_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\\
\iff &\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 3na_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\\
\iff &\sum_{n=0}^{+\infty} [n(n-1)a_n + (n+1)na_{n+1} + 3na_n + (n+1)a_{n+1} + a_n]\, x^n = 0\\
\iff &\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2(a_{n+1}+a_n)x^n = 0
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on trouve $a_{n+1} = -a_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. On trouve alors $a_n = (-1)^n a_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_0(-x)^n = \frac{a_0}{1+x}$$

On obtiendra systématiquement des solutions sur un intervalle centré en 0. Toutes les solutions de l'équation n'étant pas nécessairement développables en série entière, il se peut que l'on obtienne qu'une partie des solutions. Dans l'exemple précédent, il y a bien une infinité de solutions mais les solutions développables en série entière ne forment qu'une droite vectorielle.

- **Recherche de solutions de type polynomiales**

  On pourra commencer par rechercher le degré d'une fonction polynomiale éventuellement solution, des conditions sur son coefficient dominant, sur ses racines...

Exemple

Considérons l'équation différentielle $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 0$.
Posons $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n = \deg(P)$, c'st-à-dire $a_n \neq 0$.
Si $n \neq 0$, le terme dominant[3] de $x(x+1)P''(x) + (x+2)P'(x) - P(x)$ est $(n^2-1)a_n x^n$, donc $n \leqslant 1$. On peut donc poser $P(x) = ax + b$ et en injectant dans l'équation on trouve $b = 2a$, c'est-à-dire $P(x) = a(x+2)$.

- **Factorisation par une solution déjà connue (méthode dite de Lagrange)**

  Cette technique s'apparente à méthode de variation de la constante. Si on connaît une solution y_0 de l'équation différentielle, on peut chercher une solution sous la forme $y = y_0 z$.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent et posons $y(x) = (x+2)z(x)$.

$$\begin{aligned}
x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 0 &\iff x(x+1)(x+2)z''(x) = -(3x^2+6x+4)z'(x)\\
&\iff x(x+1)(x+2)Z'(x) = -(3x^2+6x+4)Z(x)
\end{aligned}$$

en posant $Z(x) = z'(x)$. Z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme (décomposition en éléments simples) :

$$Z'(x) = \left(-\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}\right) Z(x)$$

Ainsi, $Z(x) = A \cdot \dfrac{x+1}{(x+2)^2 x^2} = \dfrac{A}{4}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+2)^2}\right)$, puis, $z(x) = A'\left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x}\right) + B$ avec $A, A', B \in \mathbb{R}$.
Enfin, $y(x) = \dfrac{A''}{x} + B(x+2)$ avec $A'', B \in \mathbb{R}$. On a obtenu l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ (et non $\mathbb{R}^*$).

- **Changements de variable ou d'inconnue** (toujours fournis par l'énoncé)

Exercice 3

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $x^2 y'' + y = 0$ en posant $t = \ln(x)$.

II | Systèmes d'équations linéaires

A – Définition et propriétés

Un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants est un système de la forme :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t) \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

On peut alors le mettre sous la forme $X' = AX + B$ avec :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})\,; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\,; \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

On suppose par la suite que la fonction vectorielle B à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est continue sur un intervalle I. On suppose de plus, dans le cadre de ce chapitre, que les coefficients de la matrice ne dépendent pas de t.

Exemple

Le système $\begin{cases} x' = 3x - y + 2 \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$ peut s'écrire $X' = AX + B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Théorème 13.8 : Structure de l'ensemble des solutions

- L'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension n.
- Les solutions du système différentiel $X' = AX + B$ sont la somme des solutions du système homogène associé et d'une solution particulière du système.

Démonstration

- Cas du système homogène
  La fonction nulle (à valeurs dans $\mathbb{K}^n$) est évidemment solution du sysème et si X_1 et X_2 sont deux solutions , λ un scalaire, alors $\lambda X_1 + X_2$ est encore solution :

$$A(\lambda X_1 + X_2) = \lambda AX_1 + AX_2 = \lambda X_1' + X_2' = (\lambda X_1 + X_2)'$$

  On admet la dimension de l'espace en question.
- Cas du système avec second membre

Supposons que X_0 est une solution particulière du système différentiel $X' = AX + B$.

$$\begin{aligned} \tilde{X} \text{ solution du système complet } &\Longleftrightarrow \tilde{X}' = A\tilde{X} + B \\ &\Longleftrightarrow \tilde{X}' = A\tilde{X} + X_0' - AX_0 \Longleftrightarrow (\tilde{X} - X_0)' = A(\tilde{X} - X_0) \\ &\Longleftrightarrow \tilde{X} - X_0 \text{ solution du système homogène} \end{aligned}$$

$\tilde{X}$ est bien la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène. ■

Comme c'est le cas pour les équations différentielles linéaires scalaires, le théorème suivant nous permet de justifier pour les systèmes linéaires l'existence et l'unicité d'une solution à un problème de Cauchy.

Théorème 13.9 : Problème de Cauchy

Soient $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Alors, le problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ admet une et une seule solution.

Considérons enfin l'équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre n : $y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} (*)$

$$(*) \quad \Longleftrightarrow \quad Y' = AY \quad \text{avec} \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Résoudre une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n revient à résoudre un système différentiel linéaire d'ordre 1.

B – Résolution de l'équation homogène $X' = AX$

1 – Cas où A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Le plus simple est sans doute de constater ce qu'il se passe sur un exemple.

Considérons le système $\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$ qui peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$X' = AX \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que la matrice A est diagonalisable car symétrique à coefficients réels. On peut même déterminer une matrice de passage orthogonale.
Le vecteur $(1,1)$ est clairement vecteur propre associé à la valeur propre 3. La trace nous fournit la dernière valeur propre, à savoir -1. Elle est associé au vecteur propre $(-1,1)$ qui est orthogonal au premier vecteur (les sous-espaces propres sont orthogonaux). Ainsi,

$$D = P^{-1}AP \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi construite, la matrice P n'est pas orthogonale, ce qui pourrait conduire à un calcul de l'inverse un peu pénible. La suite des calculs montrera que nous n'en avons pas besoin.

$$X' = AX \Longleftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Longleftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \Longleftrightarrow Y' = DY \quad \text{avec} \quad Y = P^{-1}X$$

Notons que $P^{-1}X' = (P^{-1}X)'$ car les coefficients de A donc de P ne dépendent pas de t.

Écrivons le nouveau système obtenu en posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$:

$$Y' = DY \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = 3y_1(t) \\ y_2'(t) = -y_2'(t) \end{cases}$$

Le système obtenu n'est que la concaténation de deux équations différentielles scalaires indépendantes que l'on peut facilement résoudre :

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{3t} \\ y_2(t) = C_2 e^{-t} \end{cases} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

De plus, $X = PY$ donc les fonctions x_1 et x_2 sont combinaisons linéaires des fonctions y_1 et y_2. Plus précisément,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} \\ C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} X_1 + C_2 e^{-t} X_2$$

où X_1 et X_2 sont les deux colonnes de la matrice P.
On généralise facilement le résultat précédent à une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Théorème 13.10

Soit A une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe alors une base $(X_1, \dots, X_n)$ de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ éventuellement multiples.
Les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de la forme :

$$X(t) = P \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} X_n \quad \text{avec} \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$$

Démonstration

On a $D = P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec P la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs propres X_j. En posant $Y = P^{-1}X$, il vient $Y' = DY$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$ donc $y_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$ avec $C_i \in \mathbb{R}$. D'où le résultat suivant :

$$X(t) = PY(t) = P \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} X_n$$

■

Remarquons deux choses :

- À aucun moment il n'a fallu inverser explicitement la matrice P.
- L'ensemble des solutions du système homogène peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{S}_H = \text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda_1 t} X_1, \dots, t \mapsto e^{\lambda_n t} X_n)$$

On retrouve bien le fait qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$. Mais les vecteurs colonnes étant linéairement indépendants, ils forment une base de cet espace qui est donc de dimension n.

Exercice 4

Résoudre le système $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$

2 – Cas où A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les solutions trouvées doivent être réelles, même si l'on fait un détour par $\mathbb{C}$ pour résoudre le système.

D'après ce qui précède,

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} X_n \quad (*)$$

avec $C_1,\dots,C_n \in \mathbb{C}$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ (rappelons que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc son polynôme caractéristique est à coefficients réels. Ainsi, si λ est une valeur propre non réelle de A, $\overline{\lambda}$ est également valeur propre. De plus, les vecteurs propres associés sont eux-mêmes conjugués :

$$AX = \lambda X \quad \Longrightarrow \quad \overline{AX} = \overline{\lambda}\cdot\overline{X} \quad \Longleftrightarrow \quad A\overline{X} = \overline{\lambda}\cdot\overline{X}$$

Il apparaît dans $(*)$ une expression de la forme $C\mathrm{e}^{\lambda t}X + C'\mathrm{e}^{\overline{\lambda}t}\overline{X}$ avec $C, C' \in \mathbb{C}$. On admettra que l'on peut la réécrire sous la forme :

$$C\mathrm{e}^{\lambda t}X + C'\mathrm{e}^{\overline{\lambda}t}\overline{X} = a\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\lambda t}X) + b\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\lambda t}X) \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Un résultat analogue (cas des équations différentielles linéaires d'ordre 2) est démontré au paragraphe 4.

Exemple

Étudions le cas du système $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}$ associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$D = P^{-1}AP \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

Puis,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1\mathrm{e}^{(2+i)t}\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{(2-i)t}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

Or,

$$\mathrm{e}^{(2+i)t}\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t}(\cos(t) + i\sin(t))\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} \cos(t)+\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + i\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} \sin(t)-\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Au final,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = a\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} \cos(t)+\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + b\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} \sin(t)-\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

3 – Cas où A est trigonalisable

On notera que cela est toujours possible, quitte à travailler dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Supposons que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ 0 & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Avec les notations précédentes,

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t) = TY(t) \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) + t_{12}y_2(t) + \cdots + t_{1,n}y_n(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) + \cdots + t_{2,n}y_n(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases}$$

On détermine alors y_n puis on remonte... On retrouve alors X à l'aide de la formule $X = PY$ (il est toujours inutile de calculer P^{-1}).

4 – Application à la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2

Considérons l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante :

$$ax'' + bx' + cx = 0 \quad (a \neq 0)$$

On peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b/a & -c/a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix}$$

En posant $X=\begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} -b/a & -c/a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $X'=AX$. Notons que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^2 - \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}$. Ses racines sont donc solutions de l'équation (caractéristique!) $ax^2+bx+c=0$.

Là, plusieurs cas sont envisageables.

- Si A admet deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 distinctes, A est diagonalisable.
  La matrice est alors semblable $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
  X donc x est alors une combinaison linéaire de $t \mapsto e^{\lambda_1 t}$ et $t \mapsto e^{\lambda_2 t}$.
- Si A admet deux valeurs propres complexes non réelles conjuguées λ et $\overline{\lambda}$, A est diagonalisable.
  La matrice est alors semblable $D=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$ avec $\lambda=\alpha+i\beta$.
  X donc x est là encore une combinaison linéaire (à coefficients complexes) de $t\mapsto e^{\lambda t}$ et $t\mapsto e^{\overline{\lambda} t}$.
  On peut donc écrire $x(t)=C_1e^{\lambda t}+C_2e^{\overline{\lambda}t}$ où $(C_1,C_2)\in\mathbb{C}^2$. Écrivons λ sous la forme $\alpha+i\beta$ avec $\beta\neq 0$.
  Comme les solutions recherchées sont réelles, on a, en particulier :
  $$y(0)=C_1+C_2\in\mathbb{R}\,; \quad y\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)=ie^{\frac{\alpha\pi}{2\beta}}(C_1-C_2)\in\mathbb{R}$$
  Ce qui conduit à $C=C_1=\overline{C_2}$, puis :
  $$y=e^{\alpha t}\left(Ce^{i\beta t}+\overline{Ce^{i\beta t}}\right)=2e^{\alpha t}\operatorname{Re}\left(Ce^{i\beta t}\right)=e^{\alpha t}\left(c_1\cos(\beta t)+c_2\sin(\beta t)\right) \quad (c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2$$
  x est ainsi une combinaison linéaire (à coefficients réels) de $t\mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $t\mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t)$.

  Exercice 5

  À quelle(s) condition(s) sur α et β les solutions obtenues sont-elles bornées sur $\mathbb{R}_+$?

- Si A admet une racine double λ, A n'est pas diagonalisable.
  En effet, A serait alors semblable donc égale à λI_2 ce qui n'est pas possible au vu de la forme de A.
  Elle est cependant trigonalisable! Il existe même $P\in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $T=P^{-1}AP$ avec $T=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
  Le nouveau système obtenu est alors de la forme :
  $$\begin{cases} y_1'(t)=\lambda y_1(t)+y_2(t) \\ y_2'(t)=\lambda y_2(t) \end{cases}$$
  On trouve alors $y_2(t)=c_1e^{\lambda t}$ puis $y_1'(t)=\lambda y_1(t)+c_1e^{\lambda t}$ donc $y(t)=(c_1t+c_2)e^{\lambda t}$.
  Au final, X donc x est une combinaison linéaire de $t\mapsto e^{\lambda t}$ et $t\mapsto te^{\lambda t}$.

Remarquons que dans les trois cas, l'ensemble des solutions forme un plan vectoriel.

C – Résolution de l'équation avec second membre $X'=AX+B$

Traitons seulement le cas où A serait diagonalisable. Avec les notation précédentes,

$$\begin{aligned} X'=AX+B &\iff X'=PDP^{-1}X+B \\ &\iff P^{-1}X'=DP^{-1}X+P^{-1}B \iff Y'=DY+P^{-1}B \end{aligned}$$

On peut alors résoudre le système $Y'=DY$ et rajouter une solution particulière du système $Y'=DY+P^{-1}B$. On aura alors $X=PY$. On notera que dans ce cas, le calcul de P^{-1} est nécessaire.