Norme sur un espace vectoriel

Travaux dirigés #07

Exercice 1 — Soit E un espace vectoriel normé et soient $x, y, z \in E$ vérifiant $x + y + z = 0$. Montrer que :

$$\|x\| + \|y\| + \|z\| \leqslant \frac{2}{3}\left[\|x-y\| + \|y-z\| + \|z-x\|\right]$$

Exercice 2 — Soient E un espace vectoriel normé. Si A est une partie bornée non vide de E, on appelle diamètre de A le réel :

$$\delta(A) = \sup_{x,y\in A} \|x-y\|$$

1. Justifier l'existence de $\delta(A)$.
2. Soient A et B sont deux parties bornées de E d'intersection non vide.
   a) Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \delta(A) \leqslant \delta(B)$.
   b) Montrer que $\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$.

Exercice 3 — Soit E un espace préhilbertien. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \sup_{\substack{y\in E\\ \|y\|\leqslant 1}} |(x|y)|$$

Exercice 4 — Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E et B_1 et B_2 les boules unités fermées associées. Montrer que $B_1 = B_2$ si, et seulement si, $N_1 = N_2$.

Exercice 5 — Sur $\mathbb{R}^2$, on pose :

$$\forall (x,y) \in E, \quad N(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |x + ty|$$

1. Vérifier que N est une norme.
2. Représenter les boules unités pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ et N.
3. Reprendre les questions précédentes avec les normes définies par :

$$N'(x,y) = \int_0^1 |x + ty|\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad N''(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2}$$

Exercice 6 — Soit E l'ensemble des suites réelles bornées vérifiant $u_0 = 0$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, l'ensemble des suites bornées, et que l'application N définie par :

$$\forall u \in E, \quad N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$$

   est une norme sur E.
2. Vérifier que pour tout $u \in E$, $N(u) \leqslant 2\|u\|_\infty$. Peut-il y avoir égalité ?
3. Montrer que les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 7 — On définit sur $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'application

$$N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

Montrer que N est une norme puis que $\|\cdot\|_\infty \leqslant \sqrt{2}N$. Sont-elles équivalentes ?

Exercice 8 — Soit E l'ensemble des application lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit alors, pour $a \in [0,1]$,

$$N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{\substack{(x,y)\in[0,1]^2\\ x\neq y}} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \; ; \; N_a(f) = |f(a)| + \sup_{\substack{(x,y)\in[0,1]^2\\ x\neq y}} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-e.v. et que N et N_a sont des normes sur E.
2. Prouver que N et N_a sont équivalentes mais que N et $\|\cdot\|_\infty$ ne le sont pas.

Exercice 9 — Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour tout $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on pose :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \; ; \quad N_2(P) = \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \; ; \quad N_3(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$$

1. Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E.
2. Donner des inégalités optimales entre N_1, N_2 et N_3.
   Sont-elles équivalentes ?

Exercice 10 — Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, N_a est une norme.
2. Montrer que N_0 et N_1 sont équivalentes puis, plus généralement, que pour tous $a, b \in [0,1]$, N_a et N_b sont équivalentes.
3. a) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^n/2^n$. Déterminer pour quelles normes N_a la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser dans ce cas sa limite.
   b) Établir que pour $0 \leqslant a < b$ et $b > 1$, N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

Exercice 11 — *Autour des normes matricielles*
On considère les trois applications définies sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\|M\|_1 = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |m_{i,j}|\,; \quad \|M\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2}\,; \quad \|M\|_\infty = \sup_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}|$$

1. Montrer que ces applications sont des normes sur E.
2. a) Montrer qu'elles vérifient de plus, pour les deux premières :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|MN\| \leqslant \|M\| \cdot \|N\|$$

   b) En déduire que pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|MN\| \leqslant c \cdot \|M\| \cdot \|N\|$$

Exercice 12 — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $(M^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ;

(b) les valeurs propres de M sont de module strictement inférieur à 1 ;

(c) $\sum_{p\in\mathbb{N}} M^p$ converge.

Exercice 13 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L.
Montrer que A et L commutent puis que L est une matrice de projection.

Exercice 14 — *Norme subordonnée*
On considère la norme définie sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par $\|X\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des vecteurs colonnes unitaires. On pose alors, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$N(A) = \sup_{X\in\mathcal{S}} \|AX\|$$

1. Justifier que N est bien définie puis montrer que pour tous $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leqslant N(A)\|X\|$.
2. En déduire que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Justifier que N est en fait la norme $\|\cdot\|_1$ définie dans l'exercice 11.

CCINP Exercices 37, 38, 40 et 61.