

Topologie des espaces normés

Travaux dirigés #15

Partie A – Bestiaire topologique

Exercice 1 — Soient A et B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E . On pose $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Montrer que :

1. si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert;
2. si A et B sont bornés, alors $A + B$ est borné.
3. si A et B sont fermés, alors $A + B$ n'est pas nécessairement fermé;
On pourra considérer $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ et $B = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 — Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E . Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ puis $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 3 — Soient E un espace vectoriel normé et F un s.e.v. de E .

1. Montrer que \overline{F} est un sous-espace vectoriel de E .
2. En déduire que tout hyperplan de E est soit fermé, soit dense dans E .

Exercice 4 — CCINP

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel normé, A une partie non vide de E .

1. a) Donner la caractérisation séquentielle de \overline{A} .
b) Prouver que, si A est convexe, alors \overline{A} est convexe.
2. On pose pour tout $x \in E$, $d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.
a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \implies x \in \overline{A}$.
b) On suppose que A est fermée et que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall t \in [0, 1], \quad d_A(tx + (1-t)y) \leq td_A(x) + (1-t)d_A(y)$$

Prouver que A est convexe.

Exercice 5 — Montrer que l'ensemble des polynômes réels de degré n scindés à racines simples est une partie ouverte de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6 — Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $S_n^+(\mathbb{R})$ est dense dans $S_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7 — Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 8 — Densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. a) Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure. Déterminer une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices diagonalisables qui converge vers T .
b) En déduire que l'ensemble des matrices diagonalisables $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. a) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est ni ouvert, ni fermé.
b) Déterminer au moyen de l'application $M \mapsto \text{Tr}(M)^2 - 4 \det(M)$ l'intérieur et l'adhérence de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$. Qu'en déduire ?

Partie B – Applications continues

Exercice 9 — CCINP

E et F désignent deux espaces vectoriels normés. Soient $f : E \rightarrow F$ et $a \in E$. Montrer que f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Exercice 10 — Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que les applications suivantes sont continues sur E :

$$M \mapsto \text{Tr}(M); \quad M \mapsto \det(M); \quad M \mapsto \chi_M; \quad M \mapsto M^{-1}$$

Pour la dernière application, on pourra utiliser la comatrice.

2. Montrer que les applications suivantes ne sont pas continues sur E :

$$M \mapsto \text{rg}(M); \quad M \mapsto \pi_M$$

On pourra considérer une matrice nilpotente.

3. Montrer que $(M, N) \mapsto MN$ est continue sur E^2 .

Exercice 11 — Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|P\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \quad \text{pour} \quad P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$$

Étudier la continuité des applications suivantes :

$$P \mapsto P(\alpha); \quad P \mapsto XP; \quad P \mapsto P \cdot Q; \quad P \mapsto P'; \quad P \mapsto \int_0^X P; \quad P \mapsto \int_0^1 P$$

Exercice 12 — Soient $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ munis respectivement des normes définies par :

$$\forall f \in E, \quad N_1(f) = \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \forall f \in F, \quad N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Soit $T : E \rightarrow F$ définie par : $\forall f \in E, \quad \forall x \in [0, 1], \quad T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$

Montrer que T est une application linéaire continue.

Exercice 13 — Soit E l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur \mathbb{R}_+ et à valeurs dans \mathbb{R} . On munit E de la norme définie par :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_0^{+\infty} |f(t)| dt$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est bien une norme sur E .
2. Soit $\alpha > 0$. On pose, pour tout $f \in E$, $\Phi(f) = g$ où :

$$g : x \mapsto e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t} f(t) dt$$

Montrer que Φ est un endomorphisme continu de E .

Exercice 14 — On définit les deux ensembles :

$$\ell^1(\mathbb{R}) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| \text{ converge}\}$$

$$\ell^\infty(\mathbb{R}) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée}\}$$

On pose, pour tous $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{R})$ et $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{R})$, $\langle u, a \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$.

1. Justifier l'existence de $\langle u, a \rangle$.
2. Montrer que pour tout $u \in \ell^1(\mathbb{R})$, l'application $a \mapsto \langle u, a \rangle$ est continue.
3. Montrer que pour tout $a \in \ell^\infty(\mathbb{R})$, l'application $u \mapsto \langle u, a \rangle$ est continue.

Exercice 15 — Norme subordonnée

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On pose, pour tout $f \in \mathcal{L}_c(E)$,

$$\|f\| = \sup_{x \in E} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

1. Vérifier que $\|f\|$ est bien définie et que pour tout $f \in \mathcal{L}_c(E)$,

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$$

2. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.
3. Calculer $\|\text{id}_E\|$ et prouver que :

$$\forall f, g \in \mathcal{L}_c(E), \quad \|g \circ f\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

Exercice 16 — Soient φ une forme linéaire sur E non nulle et $H = \text{Ker}(\varphi)$.

1. a) Montrer que H est soit fermé, soit dense dans E .
b) Montrer que φ est continue si et seulement si H est fermé dans E .
2. On prend ici $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.
Trouver deux normes pour lesquelles H est fermé / H est dense.

Exercice 17 — CCINP

Soit \mathcal{A} une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\|\cdot\|$. On suppose que pour tous $u, v \in \mathcal{A}$, $\|u \cdot v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

1. Démontrer que, pour tout $u \in \mathcal{A}$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.
2. Soit u un élément de \mathcal{A} tel que $\|u\| < 1$.
a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
b) Démontrer que $e - u$ est inversible et que $(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

⚙️ Partie C – Parties compactes

Exercice 18 — Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ . Montrer que $K = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compacte.

Exercice 19 — Soient A et B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E . On pose $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Montrer que :

1. si A est fermé et B compact, alors $A + B$ est fermé ;
2. si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.

Exercice 20 — *Application presque contractante*

Soient K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E et $f : K \rightarrow K$ telle que pour tous $x, y \in E$ distincts, $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

1. Établir à l'aide de l'application $\varphi : x \mapsto \|f(x) - x\|$ l'existence et l'unicité d'un point fixe pour f , noté a .
2. On considère une suite définie par $x_0 \in K$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Démontrer que $\|x_n - a\|$ admet une limite, notée ℓ .
 - b) Soit b est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - i – Montrer que $\|b - a\| = \ell$.
 - ii – Montrer que $f(b)$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - c) Conclure.

Exercice 21 — *Théorème de d'Alembert-Gauss*

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ et pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $\|P\| = \max_{z \in \mathbb{U}} |P(z)|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $|P(0)| \leq \|P\|$.
3. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré supérieur à 1, $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Établir l'existence de $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$P(z_0 + re^{i\theta}) - P(z_0) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \alpha r^n e^{in\theta}$$

4. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $\|P\| = \sup_{z \in B} |P(z)|$.
5. En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.

⚙️ Partie D – Parties connexes par arcs

Exercice 22 — Soit E un espace vectoriel normé de dimension $n \geq 2$. Montrer que la sphère unité est connexe par arcs.

Exercice 23 — Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une partie étoilée.

Exercice 24 — Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties connexes par arcs de E .

1. L'intérieur et l'adhérence de A sont-ils connexes par arcs ?
2. Montrer que $A \times B$ et $A + B$ sont connexes par arcs.

Exercice 25 — Soient $p \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que $U = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$ est connexe par arcs.
2. En considérant l'application $z \mapsto \det(zA + (1-z)B)$ pour $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
3. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.