Familles sommables

Travaux dirigés #02

Partie A – Sommabilité et calcul de sommes

Exercice 1 — Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ les familles sont-elles sommables ?

$$\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \qquad \left(\frac{z^{pq}}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \qquad \left(\frac{(p+q)!}{p!q!}z^{p+q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$$

Exercice 2 — Soit $q \in \mathbb{C}$ avec $|q|<1$.

1. Montrer que la famille $\left(q^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et calculer sa somme.
2. Soit $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence et calculer $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\mathrm{e}^{in\theta}$.

Exercice 3 — Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Étudier la sommabilité des familles :

$$\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \qquad \left(\frac{a^p b^q}{(p+q)!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \qquad \left(\frac{1}{p^\alpha+q^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$$

Exercice 4 — Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $u_{n,p} = \dfrac{(-1)^n}{2^{\max(n,p)}}$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(u_{n,p}\right)_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2. Calculer sa somme.
3. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n}(n+1)$.

Exercice 5 — Préciser la nature des séries :

$$\sum (-1)^n(\zeta(n)-1) \qquad \sum \frac{\zeta(n)-1}{n} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)$$

On montrera que pour tout $x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$.

On rappelle que $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} - \ln(n)\right)$.

Exercice 6 — Établir que pour $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$

où l'on a noté $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 7 — Justifier la convergence et calculer, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z|<1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$$

Exercice 8 — Pour $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, on pose $u_{p,q} = \dfrac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

1. Montrer la sommabilité de $\left(u_{p,q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$.
2. Calculer sa somme puis $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n(n+1)}$. *On admet pour cela que* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 9 —

1. Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$.
2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^\alpha}$ a-t-elle un sens ?
3. Montrer que pour ces valeurs de α, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^\alpha} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty}\dfrac{1}{p^{\alpha-1}}$.

Partie B – Produit de Cauchy

Exercice 10 — Établir l'existence et calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)5^{-n}$.

Exercice 11 — Établir que :

$$\mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n!} \quad \text{où} \quad H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

CCINP ∅