14 Fonctions de plusieurs variables

« Les mathématiques sont un jeu que l'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles ou des concepts qui n'ont en soi, aucune importance particulière. »
David Hilbert (1862 – 1943)

Plan de cours

I | Fonctions de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$

Il s'agit de fonctions du type :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \right.$$

où $\mathscr{U}$ désigne une partie de $\mathbb{R}^2$.

A – Ensemble de définition

C'est l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y)$ existe ; on le représente graphiquement comme une partie du plan.

Exercice 1

Déterminer et représenter les ensembles de définition des fonctions définies par :

$$f_1(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ; \quad f_2(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \ ; \quad f_3(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x+y-1}}$$

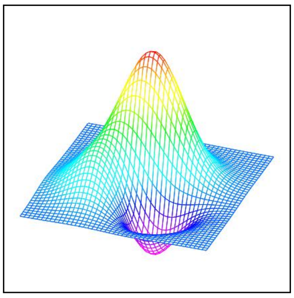
B – Représentation

La surface d'équation $z = f(x,y)$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x,y,f(x,y))$ pour $(x,y) \in \mathscr{D}_f$.

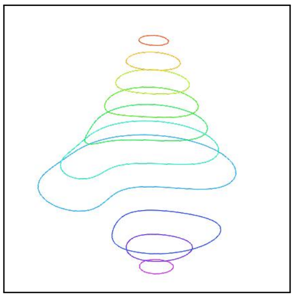
Définition 14.1 : Ligne de niveau

On appelle ligne de niveau (de hauteur k) la courbe d'équation $f(x,y) = k$.

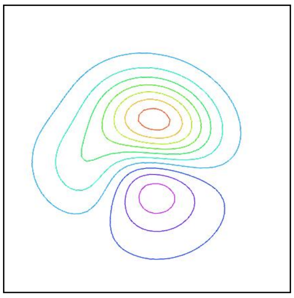
Elles permettent de visualiser la surface d'équation $z = f(x,y)$. On peut également parler d'altitude au lieu de hauteur.



Exemple de surface



Lignes de niveau 3D



Lignes de niveau

C – Limite et continuité

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^2$. On a $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

- On dit que f est bornée si :

$$\exists M \geqslant 0 \quad \forall (x,y)\in\mathscr{D}_f \quad |f(x,y)| \leqslant M$$

- On dit que f admet une limite $\ell\in\mathbb{R}$ en (x_0,y_0) si :

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \eta>0 \quad \|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\eta \Longrightarrow |f(x,y)-\ell|<\varepsilon$$

- On dit que f est continue en (x_0,y_0) si $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \eta>0 \quad \|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\eta \Longrightarrow |f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

La somme, le produit, la composée et le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions continues sont des fonctions continues.

Quelques remarques :

($\star$) Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue, l'image d'un segment est un segment. f est donc bornée et atteint ses bornes. On peut généraliser ce résultat à une fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:
Si A est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est continue alors $f(A)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$.

($\star$) Si f est continue alors les applications partielles $f_x : y\mapsto f(x,y)$ et $f_y : x\mapsto f(x,y)$ le sont également. La réciproque est fausse.

Exemple

> Soit f la fonction définie par $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$.
> La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? La réponse est non :
>
> $$f(0,y)=0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0 \quad \text{alors que} \quad f(x,x)=\frac{1}{2}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}$$

D – Dérivées partielles premières

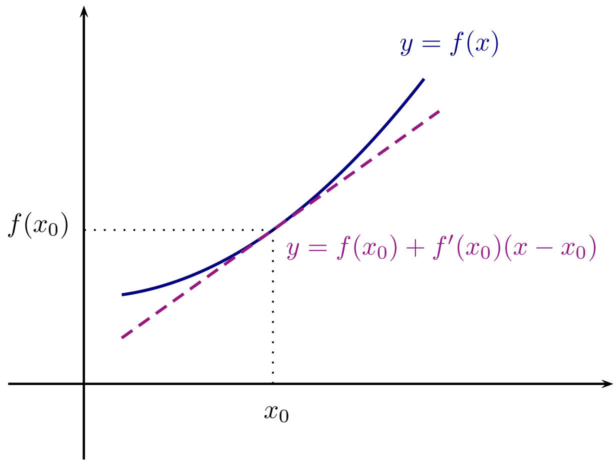
1 – Rappels sur les fonctions d'une variable réelle

Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la formule de Taylor-Young nous permet d'écrire :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \mathrm{o}(x-x_0) \quad (\star)$$

L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0 est alors :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$



L'égalité $(\star)$ peut s'écrire :

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} \underbrace{f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\cdot h}_{\text{partie linéaire}}}_{\text{partie affine}} + o(h)$$

L'application $h \mapsto f'(x_0)\cdot h$ est linéaire. On l'appelle différentielle de f en x_0 et on la note $\mathrm{d}f_{x_0}$.
On notera que $\mathrm{d}f_{x_0} \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$. La notion de différentielle est cependant hors programme.

2 – Fonctions de deux variables : plan tangent et différentielle

f désignera désormais une fonction définie sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 14.2

Sous réserve d'existence, on définit les dérivées partielles premières de f au point $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$ par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Définition 14.3

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ si les dérivées partielles existent et sont continues en tout point de $\mathscr{U}$.

Exemple

L'application $(x, y) \mapsto 3x^2 + 5x\sin(y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x + 5\sin(y); \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5x\cos(y)$$

Théorème 14.4 : Formule de Taylor-Young à l'ordre 1

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ alors pour $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$:

$$f(x_0+h, y_0+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot k + o(\|(h,k)\|)$$

Le plan tangent à la surface au point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) avec $z_0 = f(x_0, y_0)$ a alors pour équation :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$$

C'est bien une équation de plan, de la forme $a\,x + b\,y + c\,z = d$ avec $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ et $c = 1$.
Le vecteur de coordonnées $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right)$ est normal au plan tangent.

Exemple

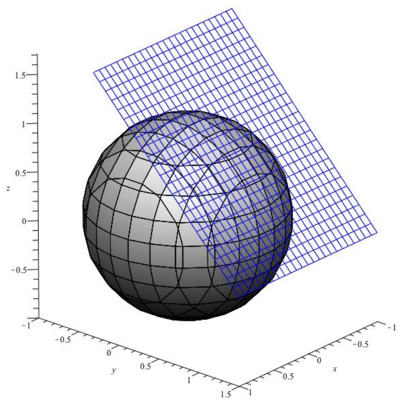
Considérons la sphère de centre O et de rayon 1 qui a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

On a alors $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ et on pose :

$$f : (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

La surface représentative de f est une demi-sphère.

Déterminons une équation du plan tangent au point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.



La sphère et son plan tangent en (x_0, y_0, z_0)

Tout d'abord :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{-x_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}\,; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{-y_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}$$

On a ici $x_0 = 0$ et $y_0 = z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où :

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + 0\cdot(x - 0) + (-1)\cdot\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{c'est-à-dire} \quad y + z = \sqrt{2}$$

Si f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$. L'application

$$(h, k) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot k$$

est linéaire, on l'appelle différentielle de f en (x_0, y_0). On la note $\mathrm{d}f_{(x_0, y_0)}$. Là encore, la notion de différentielle n'est pas au programme. On notera que $\mathrm{d}f_{(x_0, y_0)} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Sa matrice représentative dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}$ est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Définition 14.5 : Gradient

Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$. On appelle gradient de f au point (x_0, y_0) le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$. On le notera $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0)$ ou $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$.

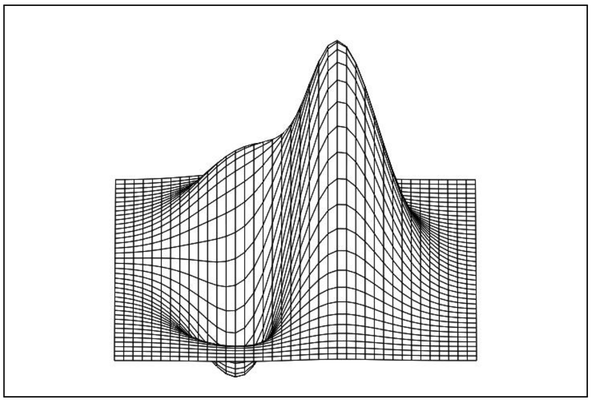
Autant pour la différentielle que pour le gradient, on omet quelques fois « (x_0, y_0) » mais il faut garder à l'esprit que l'on parle de la différentielle et du gradient en un point donné.

Proposition 14.6

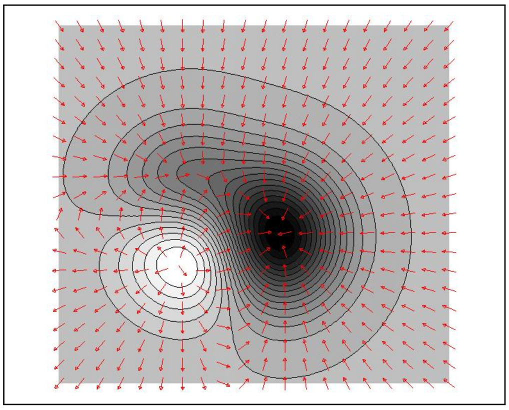
Le gradient au point M_0 est orthogonal à la ligne de niveau passant par M_0.

Le gradient indique en outre la ligne de plus grande pente.

Voici une illustration de cette propriété pour $f : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^{-(x-1)^2-(y+1/4)^2} + y\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + 3$:



Représentation de la surface d'équation $z = f(x, y)$



Gradient et lignes de niveau associés

3 – Notations

Nous venons d'introduire la différentielle de f au point $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$:

$$\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot k$$

Si l'on pose $\mathrm{d}x : (h,k) \mapsto h$ et $\mathrm{d}y : (h,k) \mapsto k$, on peut écrire par abus de notation :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

4 – Dérivées partielles et composées

- Considérons les deux applications définies par :

$$\varphi : \left|\begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathscr{U} \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad f : \left|\begin{array}{rcl} \mathscr{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}\right.$$

où $\mathscr{U}$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. La fonction φ est supposée de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$. $f\circ\varphi : I \to \mathbb{R}$ est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\forall t \in I \quad (f\circ\varphi)'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\big[(f\circ\varphi)(t+h) - (f\circ\varphi)(t)\big] &= \frac{1}{h}\big[f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))\big] \\
&= \frac{1}{h}\big[f(x(t)+hx'(t)+\mathrm{o}(h), y(t)+hy'(t)+\mathrm{o}(h)) - f(x(t), y(t))\big] \\
&= \frac{1}{h}\left[hx'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + hy'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) + \mathrm{o}(h)\right] \\
&= x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) + \mathrm{o}(1)
\end{aligned}$$

■

Exercice 2

Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer la dérivée de F avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $F : t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$.

- Considérons désormais les applications $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$F:\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2&\longrightarrow&\mathbb{R}\\(x,y)&\longmapsto&f(\varphi(x,y),\psi(x,y))\end{array}\right.$$

Alors F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x,y),\psi(x,y))+\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x,y)\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x,y),\psi(x,y))\\\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x,y),\psi(x,y))+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(x,y)\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x,y),\psi(x,y))\end{array}\right.$$

Exemple

Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, il en va de même pour $F:(r,\theta)\mapsto f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$ et,

$$\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\quad\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))+\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$$

$$\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\quad\frac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta)=-r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))+r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$$

E – Dérivées partielles secondes

Elles sont au nombre de 4 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2};\quad\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y};\quad\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\quad\text{et}\quad\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Définition 14.7

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ si les dérivées partielles secondes existent et sont continues en tout point de $\mathscr{U}$.

Théorème 14.8 : Théorème de Schwarz

Soit $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}^2$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$. Alors,

$$\forall(x_0,y_0)\in\mathscr{U}\quad\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$$

Théorème 14.9 : Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ alors pour $(x_0,y_0)\in\mathscr{U}$:

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)&+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k\\&+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cdot hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot k^2\right]+\mathrm{o}(h^2+k^2)\end{aligned}$$

F – Application à l'étude des extrema

Définition 14.10 : Extremum local

On dit que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ adet un minimum (resp. un maximum) local en (x_0,y_0) s'il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de (x_0,y_0) tel que :

$$\forall(x,y)\in\mathscr{U}\quad f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)\quad(\text{resp.} f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0))$$

Définition 14.11 : Point critique

Soit f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$. On dit que (x_0, y_0) est un point critique de f si :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \text{ soit } \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$$

On admet le théorème suivant :

Théorème 14.12 : Condition nécessaire d'existence

Si (x_0, y_0) est un extremum local de $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

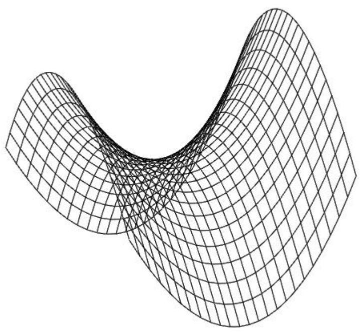
Les extremums locaux sont donc à rechercher parmi les points critiques. Cependant, la réciproque est fausse ! Tout point critique ne correspond pas nécessairement à un extremum local.

Exemple (Point selle)

Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y) = (2x, -2y)$$

Donc la fonction admet un seul point critique : $(0, 0)$. Mais ce point ne correspond ni à un maximum, ni à un minimum.



Point selle (ou point col)

En effet, $f(0,0) = 0$ et pour tous $x, y \neq 0$,

$$f(x, 0) = x^2 > f(0,0) \text{ et } f(0, y) = -y^2 < f(0,0)$$

Comment reconnaître les points correspondant à des extremums parmi les points critiques ? Quitte à supposer f de classe $\mathscr{C}^2$, utilisons la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en un point critique (x_0, y_0) :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot k^2\right] + \mathrm{o}(h^2 + k^2)$$

Comme $\mathrm{o}(h^2 + k^2)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot h^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot hk + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot k^2\right]$, le signe de $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ au voisinage de (x_0, y_0) est exactement celui de :

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot k^2\right]$$

Remarquons que l'on peut réécrire la quantité entre crochets sous la forme ${}^t XHX$ avec :

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

La matrice H s'appelle la hessienne de f au point (x_0, y_0). Remarquons que cette matrice est symétrique à coefficients réels donc diagonalisable (au moyen d'une matrice de passage orthogonale). Ses valeurs propres λ et μ sont donc réelles et on a donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot k^2 = {}^t XHX = {}^t YDY = \lambda h'^2 + \mu k'^2$$

avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix}$.

Le signe de la quantité $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ est donc localement celui de $\lambda h'^2 + \mu k'^2$.

- si λ et μ sont tous les deux strictement positifs, on est en présence d'un minimum.
- si λ et μ sont tous les deux strictement négatifs, on est en présence d'un maximum.
- si les valeurs propres sont de signes opposés, $\lambda h'^2 + \mu k'^2$ change de signe : on est en présence d'un point selle.

Enfin, si l'une (au moins) des valeurs propres est nulle, on ne peut pas conclure.

Reformulons ce résultat à l'aide du déterminant de la hessienne.

Théorème 14.13 : Condition suffisante pour la présence d'un extremum

Soit f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$. On suppose que $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$ est un point critique de f et on note H la hessienne en ce point. Alors,

- si $\det(H) > 0$ alors f admet en (x_0, y_0) un extremum.
- si $\det(H) < 0$ alors (x_0, y_0) correspond à un point selle.
- si $\det(H) = 0$ alors on ne peut pas conclure.

On notera qu'il est inutile de diagonaliser la hessienne ni même d'en calculer les valeurs propres. La trace (somme des valeurs propres) est un bon moyen pour distinguer un minimum d'un maximum.

Attention, la méthode précédente nécessite l'utilisation de la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, et donc que l'on travaille avec une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un *ouvert*.

Exemple

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$$

- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale.
- Recherche des points critiques

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y) = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} 4x^3 - 2(x - y) = 0 \\ 4y^3 + 2(x - y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 = -y^3 \\ 4x^3 - 2(x - y) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = -y \\ 4x^3 - 2(x - y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ x^3 - x = 0 \end{cases}$$

L'équation $x^3 = x$ admet trois solutions : -1, 0 et 1.

Nous avons donc trois points criques : $A(0,0)$, $B(1,-1)$ et $C(-1,1)$.

- Étude des extremums

  La hessienne en un point critique (x, y) est $H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2-2 & 2 \\ 2 & 12y^2-2 \end{pmatrix}$

  - Extremum au point $B(1,-1)$?

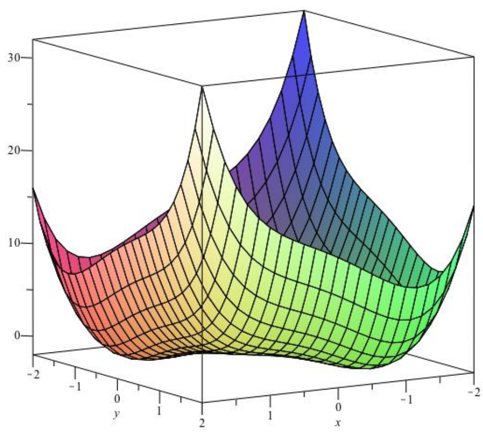
    $\det(H) = 96 > 0$ et $\mathrm{Tr}(H) = 20 > 0$ donc f présente un minimum local en $(1,-1)$ qui vaut $f(1,-1) = -2$.
  - Extremum au point $C(-1,1)$?

    $\det(H) = 96 > 0$ et $\mathrm{Tr}(H) = 20 > 0$ donc f présente un minimum local en $(-1,1)$ qui vaut $f(-1,1) = -2$.
  - Extremum au point $A(0,0)$?

    $\det(H) = 0$, on ne peut pas conclure directement. On remarquera cependant que $f(0,0) = 0$ et que :

$$f(x,x) = 2x^4 > 0 \text{ pour } x \neq 0$$
$$f(x,0) = x^2(x^2-1) < 0 \text{ pour } x \in]-1,1[$$

Il n'y a donc pas d'extremum.



Représentation de la surface d'équation $z = f(x,y)$

G – Exemple de résolution d'équations aux dérivées partielles

Nous n'aborderons la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) qu'à travers des exemples relativement simples, et, à ce titre, très restreints.
$\mathscr{U}$ désignera un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une solution des équations aux dérivées partielles proposées.

- $\forall (x,y) \in \mathscr{U} \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$

  On peut en un certain sens dire que « $f(x,y)$ est une constante par rapport à x ». Ainsi,

$$\forall (x,y) \in \mathscr{U} \quad f(x,y) = \varphi(y)$$

  où $\varphi : I \to \mathbb{R}$ où I désigne désormais un intervalle de $\mathbb{R}$.

- $\forall (x,y) \in \mathscr{U} \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y)$

$$\forall (x,y) \in \mathscr{U} \quad f(x,y) = \int g(x,y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y)$$

- $\forall (x,y) \in \mathscr{U} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$

$$\forall (x,y) \in \mathscr{U} \quad f(x,y) = \varphi(y)x + \psi(y)$$

  avec $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$.

- Équation des ondes, dite des cordes vibrantes ou encore de d'Alembert :

$$\forall (x,t) \in \mathscr{U} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0 \quad (\star)$$

On passe par le changement de variables $\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$

On a alors $f(x,t) = g(u,v)$ et on cherche une équation aux dérivées partielles vérifiée par g :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

De même, on trouve :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

L'équation $(\star)$ devient :

$$\forall (u,v) \in \mathscr{U}' \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$$

On trouve alors $g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)$ ce qui donne, au final,

$$f(x,t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

II | Généralisation aux fonctions de p variables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Soit $f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ définie sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^p$ par :

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_p) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

On note sans distinction $\|\cdot\|$ les normes euclidiennes usuelles de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^n$.

Définition 14.14 : Applications partielles et applications composantes

- On appelle applications partielles de f les applications : $x_j \mapsto f(x)$ pour $j \in [\![1,p]\!]$.
- On appelle applications composantes de f les applications $f_i : x \mapsto f_i(x)$.

Attention, ne pas confondre ces applications !

Exemple

Soit $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (\cos(u+v), u-v, u^2\mathrm{e}^v) \end{array} \right.$

- f possède deux applications partielles définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$:

$$u \mapsto (\cos(u+v), u-v, u^2\mathrm{e}^v) \text{ et } v \mapsto (\cos(u+v), u-v, u^2\mathrm{e}^v)$$

- f possède trois composantes définies sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$(u,v) \mapsto \cos(u+v), (u,v) \mapsto u - v \text{ et } (u,v) \mapsto u^2\mathrm{e}^v$$

On parle de champ de vecteurs lorsque $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et de champ scalaire lorsque $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.

A – Limite et continuité

- On dit que f est bornée sur $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p$ si :

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in \mathscr{U} \quad \|f(x)\| \leqslant M$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}^n$ quand x tend vers $x_0 \in \mathbb{R}^p$ quand :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \quad \|x - x_0\| < \eta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

- f est dite continue en $x_0 \in \mathbb{R}^p$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \quad \|x - x_0\| < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

La somme, le produit et la composée de fonctions continues est continue. En particulier, toute fonction polynomiale de plusieurs variables est continue.

Proposition 14.15 : Structure de l'ensemble des fonctions continues

L'ensemble des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 14.16 : Limite, continuité et applications composantes

- La fonction f admet une limite en x_0 si et seulement si les fonctions f_i admettent des limites en x_0, et ceci pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On a alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f_1(x), \ldots, \lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$$

- La fonction f est continue en x_0 si et seulement si les fonctions f_i sont continues en x_0, et ceci pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Ce qui est valable pour les composantes de f ne l'est pas du tout pour les applications partielles !
En effet, si f est continue en x_0, toutes les applications partielles le sont également mais la réciproque est fausse. Penser notamment à l'exemple déjà évoqué :

$$f(u, v) = \frac{uv}{u^2 + v^2} \text{ si } (u, v) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

Théorème 14.17 : Image d'un fermé borné de $\mathbb{R}^p$ par une fonction continue

L'image d'une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^p$ par une fonction continue est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$.

B – Complément : calcul différentiel

1 – Fonction de classe $\mathscr{C}^1$, différentielle et jacobienne

Définition 14.18 : Fonction de classe $\mathscr{C}^1$

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^p$ si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, c'est-à-dire si ces fonctions sont dérivables et leurs dérivées continues.

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$, alors $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ est définie pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.
Ce sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple

Soit $f : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+yz, \cos(y)+x^2) \end{array}\right.$

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et comme $f_1 : (x,y,z) \mapsto 2x+yz$ et $f_2 : (x,y,z) \mapsto \cos(y)+x^2$, on a :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = 2, \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = -\sin(y)$$

Les définitions et propriétés suivantes ne figurent pas au programme et sont données à titre indicatif.

Définition 14.19 : Jacobienne

Soit $f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$.
La matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est appelée matrice jacobienne de f au point $x = (x_1, \dots, x_p)$.
On la note généralement $J_f(x)$.

On a $J_f(x) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On notera que pour $n = p$, la jacobienne est une matrice carrée d'ordre n. On peut alors définir son déterminant.

Définition 14.20 : Jacobien

Soit $f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$.
On appelle jacobien le déterminant associé à la jacobienne de f en un point $x \in \mathbb{R}^p$.

Le jacobien [1] apparaît naturellement dans le calcul d'intégrales multiples.

Définition 14.21 : Différentielle d'une application de classe $\mathscr{C}^1$

Soit $f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$. On appelle différentielle de f au point x l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la jacobienne de f en x.
On la note $\mathrm{d}f_x$ ou plus souvent $\mathrm{d}f$.

La différentielle de f en un point $x \in \mathbb{R}^p$ est l'unique application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ est $J_f(x)$.

Exemple

Reprenons $f : (x,y,z) \mapsto (2x+yz, \cos(y)+x^2)$. L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ donc $\mathrm{d}f$ existe en tout point de $\mathbb{R}^3$. La jacobienne, par exemple, au point $(1,0,2)$ est $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{d}f_{(1,0,2)} : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+2y, 2x) \end{array}\right.$

2 – Approximation à l'ordre 1

Rappels :

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors,

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0) + hf'(x_0) + \mathrm{o}(h)$$

Ex. : $\sin(x+h) = \sin(x) + h\cos(x) + \mathrm{o}(h)$.
En posant $\mathrm{d}f_{x_0} : h \mapsto f'(x_0)h$, on a $f(x_0+h) = f(x_0) + \mathrm{d}f_{x_0}(h) + \mathrm{o}(h)$.

1. *Charles Gustave Jacob Jacobi* (1804-1851), mathématicien allemand qui a notamment travaillé sur les équations aux dérivées partielles et la théorie des nombres.

- Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Alors,

$$f(x_0+h_1,y_0+h_2)\underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{=}f(x_0,y_0)+h_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+h_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\mathrm{o}\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

En posant $\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}:h=(h_1,h_2)\mapsto h_1\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+h_2\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ et $x=(x_0,y_0)$, on a :

$$f(x+h)\underset{||h||\to 0}{=}f(x)+\mathrm{d}f_x(h)+\mathrm{o}(||h||)$$

<u>Généralisation</u> :

Théorème 14.22 : Formule de Taylor-Young à l'ordre 1

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $x\in\mathscr{U}$ et $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ alors :

$$f(x+h)\underset{h\to 0_{\mathbb{R}^p}}{=}f(x)+\mathrm{d}f_x(h)+\mathrm{o}(||h||)$$

3 – Différentielle et dérivées partielles

Si $h\in\mathbb{R}^p$, $h=\displaystyle\sum_{j=1}^{p}h_je_j$ où $(e_1,\dots,e_p)$ représente la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ et $x\in\mathscr{U}$. La jacobienne de f au point x est :

$$J_f(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(x)\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_p}(x)\end{pmatrix}$$

L'application $\mathrm{d}f_x$ étant linéaire, on a : $\mathrm{d}f_x(h)=\mathrm{d}f_x\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{p}h_je_j\right)=\displaystyle\sum_{j=1}^{p}h_j\mathrm{d}f_x(e_j)$.

Or $\mathrm{d}f_x(e_j)=\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)e_i$ donc $\mathrm{d}f_x(h)=\displaystyle\sum_{j=1}^{p}h_j\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ et en notant $\mathrm{d}x_j$ les applications $h\mapsto h_j$,

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_p}\mathrm{d}x_p$$

4 – Composition d'applications

Soit $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$ et $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, de classe $\mathscr{C}^1$ respectivement sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^m$.
Alors $g\circ f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}^p\quad J_{g\circ f}(x)=J_g(f(x))\times J_f(x)\quad\text{et}\quad \mathrm{d}(g\circ f)_x=\mathrm{d}g_{f(x)}\circ\mathrm{d}f_x.$$

5 – Différentielle et bijections réciproques

Théorème 14.23 : Théorème d'inversion globale

Soit $f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ une application que l'on suppose bijective et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^n$. On suppose de plus que pour tout $x\in\mathscr{U}$, $\mathrm{d}f_x$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.
L'application f^{-1} est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $f(\mathscr{U})$ et on a :

$$\forall x\in\mathscr{U}\quad J_{f^{-1}}(f(x))=(J_f(x))^{-1}\text{ et }\mathrm{d}f^{-1}_{f(x)}=(\mathrm{d}f_x)^{-1}$$

- Pour $n=1$, cette propriété se traduit par :
  Si $f : I \to \mathbb{R}$ réalise une bijection sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et si pour tout $x \in I$, $J_f(x) = [f'(x)] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est inversible, c'est-à-dire $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $f(I)$ et on a :

$$\forall x \in I \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

  C'est le fameux théorème de dérivation d'une bijection réciproque (amélioré) !
- Il est facile de retrouver les formules énoncées (sous réserve d'existence de $\mathrm{d}f_x^{-1}$ ce que l'on admet) en utilisant les formules de compositions :

$$\mathrm{d}(f^{-1} \circ f)_x = \mathrm{d}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})_x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = \mathrm{d}f^{-1}_{f(x)} \circ \mathrm{d}f_x$$

  De même,

$$J_{f^{-1} \circ f}(x) = J_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}}(x) = I_n = J_{f^{-1}}(f(x)) \times J_f(x)$$

6 – Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et extrema

Définition 14.24 : Point critique

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On dit que $x \in \mathbb{R}^p$ est un point critique de f si :

$$\mathrm{d}f_x = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x) = J_f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 14.25 : Condition nécessaire d'existence d'un extremum

Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ admet un extremum au point $x \in \mathscr{U}$ alors x est un point critique. Cela revient à dire que : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x) = \vec{0}$

Comme nous l'avons vu pour $p=1$ ou $p=2$, la réciproque est fausse !
Nous n'étudierons pas de condition suffisante analogue au cas $p=2$.