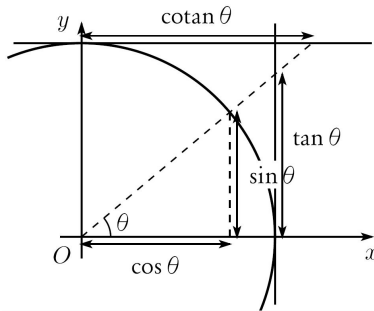


- Formulaire -

Trigonométrie

Définition



$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ et } \cotan \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Angles opposés

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \cos(-\theta) = -\cos(\pi - \theta) \\ &= -\cos(\pi + \theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \sin(\theta) &= -\sin(-\theta) = \sin(\pi - \theta) \\ &= -\sin(\pi + \theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \tan(\theta) &= -\tan(-\theta) = -\tan(\pi - \theta) \\ &= \tan(\pi + \theta) = \cotan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{aligned}$$

Valeurs remarquables

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\sin \theta$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\tan \theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	n.d.

Passage polaire/cartésien

$$z = x + iy = re^{i\theta} \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{si } x > 0, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{si } x < 0, \quad \theta = \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Complexes

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} & \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos nx + i \sin nx &= (\cos x + i \sin x)^n \end{aligned}$$

Angle double

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \quad \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x \quad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Addition des angles

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Addition des fonctions

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$a \cos x + b \sin x = \rho \cos(x - \varphi)$$

$$\text{avec } \rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arg(a + ib)$$

Produit des fonctions

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$

Dérivées et primitives

Fonction		Domaine	Dérivée
$f + g$			$f' + g'$
fg			$f'g + g'f$
$\frac{f}{g}$			$\frac{gf' - g'f}{g^2}$
f^n			$nf^{n-1}f'$
$\sin(f)$			$f' \cos f$
$\cos(f)$			$-f' \sin f$
e^f			$f'e^f$
$\ln f $			$\frac{f'}{f}$
$g \circ f$			$(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$
x^n, x^α	$n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$	$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*$	$nx^{n-1}, \alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$a \in \mathbb{R}_+^*$	\mathbb{R}	$\ln a e^{x \ln a}$
\sqrt{x}		\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$		\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2}$
e^{mx}	$m \in \mathbb{C}$	\mathbb{R}	me^{mx}
$\ln x $		\mathbb{R}^*	$\frac{1}{x}$
$\cos x, \sin x$		\mathbb{R}	$-\sin x, \cos x$
$\tan x$		$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arccos x$		$] -1, 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin x$		$] -1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$		\mathbb{R}	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x, \operatorname{th} x$		\mathbb{R}	$\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, 1 - \operatorname{th}^2 x$

Fonction		Intervalles	Primitive
x^n, x^α	$n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$	$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}, \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$
$\frac{1}{x-a}$	$a \in \mathbb{R}$	$] -\infty, a[,] a, +\infty[$	$\ln x-a $
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$a \in \mathbb{R}^*$	\mathbb{R}	$\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{1}{(x-a)^n}$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, a \in \mathbb{R}$	$] -\infty, a[,] a, +\infty[$	$\frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$
$\tan x$		$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi [(k \in \mathbb{Z})$	$-\ln \cos x $
$\frac{1}{\sin^2 x}$		$] k\pi, (k+1)\pi [(k \in \mathbb{Z})$	$-\cotan x$
$\ln x$		\mathbb{R}_+^*	$x \ln x - x$

Développements limités

Formule de Taylor à l'ordre n

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , avec f de classe au moins \mathcal{C}^n sur I . Soit a et x deux points de I . Il existe alors une fonction ε , $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, telle que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + o((x-a)^n) \end{aligned}$$

Les développements limités suivants sont tous *au voisinage de 0* :

DL_n	e^x	$= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$	$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
DL_{2n}	$\cos x$	$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
DL_{2n+1}	$\sin x$	$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
DL_6	$\tan x$	$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$	
DL_{2n+1}	$\arctan x$	$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
DL_{2n}	$\operatorname{ch} x$	$= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$	$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
DL_{2n+1}	$\operatorname{sh} x$	$= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
DL_n	$\frac{1}{1-x}$	$= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$
DL_n	$\frac{1}{1+x}$	$= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$	$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
DL_n	$\ln(1+x)$	$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
DL_n	$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$ $= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$	
DL_2	$\sqrt{1+x}$	$= 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + o(x^2)$	

Limites classiques

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \qquad \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \qquad \frac{\tan x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \frac{e^x}{x^\alpha} &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty & \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^\alpha \ln x &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ e^{-x} x^\alpha &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 & \frac{\ln x}{x^\alpha} &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Développements en série entière usuels

Rayon	Domaine	Développement
$R = +\infty$	\mathbb{R}	$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$
$R = +\infty$	\mathbb{R}	$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$R = +\infty$	\mathbb{R}	$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$R = +\infty$	\mathbb{R}	$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$R = +\infty$	\mathbb{R}	$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$R = 1$	$] -1, 1[$	$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$
$R = 1$	$] -1, 1[$	$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
$R = 1$	$] -1, 1]$	$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$
$R = +\infty$	\mathbb{C}	$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Géométrie

Géométrie dans le plan

Distance du point $M(x_0, y_0)$ à la droite \mathcal{D} d'équation $ax + by + c = 0$: $d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Géométrie dans l'espace

Distance du point M à la droite \mathcal{D} passant par A et dirigée par \vec{u} :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Distance du point $M(x_0, y_0, z_0)$ au plan \mathcal{P} d'équation $ax + by + cz + d = 0$:

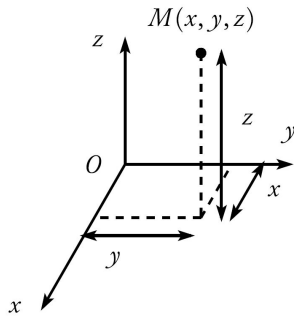
$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distance entre les deux droites non coplanaires \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 passant respectivement par A et B et dirigées respectivement par \vec{u} et \vec{v} :

$$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{|\det(\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

Systemes de coordonnees

Coordonnees cartesiennes



Le repere $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonorme et direct. La position d'un point M est donnee par ses coordonnees cartesiennes (x, y, z) , et alors

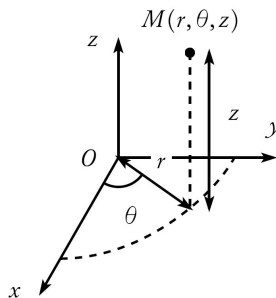
$$\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

Deplacement elementaire :

$$d\vec{OM} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

Volume elementaire : $d\tau = dx dy dz$

Coordonnees cylindriques



La position d'un point M est donnee par ses coordonnees cylindriques (r, θ, z) , avec

$$r \in [0, +\infty[, \theta \in [0, 2\pi[\quad z \in \mathbb{R}.$$

On associe au point M le repere orthonorme direct $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$:

$$\vec{u}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

On a alors $\vec{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{k}$.

Passage des coordonnees cylindriques aux coordonnees cartesiennes

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

Deplacement elementaire :

$$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{k}$$

Volume elementaire : $d\tau = r dr d\theta dz$

Les coordonnees cylindriques sont a utiliser quand une direction est privilegiee dans le probleme (ce sera la direction (Oz)).

Coordonnees polaires C'est un cas particulier des coordonnees cylindriques ($z = 0$)

On associe au point M le repere orthonorme direct plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$\vec{u}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

On a alors $\vec{OM} = r \vec{u}_r$.

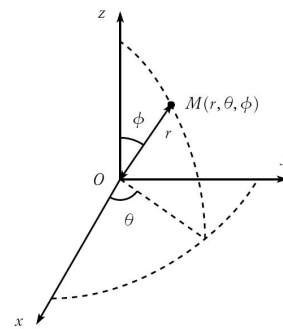
$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

Deplacement elementaire :

$$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

Surface elementaire : $dS = r dr d\theta$.

Coordonnees spheriques



La position d'un point M est donnee par ses coordonnees spheriques (r, θ, ϕ) , avec $r \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Passage des coordonnees spheriques aux coordonnees cartesiennes

$$x = r \cos \theta \sin \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \phi$$

Deplacement elementaire :

$$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r \sin \phi d\theta \vec{u}_\theta + r d\phi \vec{u}_\phi$$

Volume elementaire : $d\tau = r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi$.

Probabilités

Lois usuelles discrètes

Nom	Notation	$X(\Omega)$	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$	$G(t)$
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$\{0; 1\}$	$\begin{cases} p & \text{si } k = 0 \\ 1 - p & \text{si } k = 1 \end{cases}$	p	$p(1 - p)$	$1 - p + pt$
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$\{0; n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$	$(1 - p + pt)^n$
Uniforme	$\mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$	$\llbracket 1; n \rrbracket$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{t-t^{n+1}}{n(1-t)}$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	\mathbb{N}^*	$(1 - p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pt}{1-(1-p)t}$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	\mathbb{N}	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$

Divers

Coefficients binomiaux

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}; \quad p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}; \quad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}; \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

Alphabet grec

α	A	alpha	ν	N	nu
β	B	bêta	ξ	Ξ	xi ou ksi
γ	Γ	gamma	\omicron	O	omicron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ϵ	E	epsilon	ρ	P	rhô
ζ	Z	zêta	σ	Σ	Sigma
η	H	êta	τ	T	Tau
θ	Θ	thêta	υ	Υ	upsilon
ι	I	iota	ϕ, φ	Φ	phi
κ	K	kappa	χ	X	chi
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	M	mu	ω	Ω	oméga

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

On résout l'équation caractéristique $X^2 - aX - b = 0$, de discriminant associé Δ .

- Si $\Delta > 0$, deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 :
 $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$
- Si $\Delta = 0$, une racine double r :
 $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\lambda + n\mu)r^n$
- Si $\Delta < 0$, deux racines complexes conjug. $\rho e^{\pm i\theta}$:
 $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$