12 | Intégrales à paramètres

« La géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses. »
René Descartes (1596 – 1650)

Plan de cours

On appelle intégrale à paramètre une intégrale du type $\displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ où $f : I\times J \to \mathbb{R}$.

Par commodité, nous noterons g la fonction définie par $g(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

On s'intéresse dans ce chapitre à la régularité de l'application g ainsi définie.

I | Domaine de définition

Tout d'abord, $x \in \mathscr{D}_g \Longleftrightarrow \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ existe. Deux possibilités :

- Si J est un segment et si $t \mapsto f(x,t)$ est continue alors l'intégrale est bien définie.
- Si J n'est pas un segment et si $t \mapsto f(x,t)$ est continue , il s'agit d'étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Les résultats suivants feront leur apparition dans le prochain chapitre, nous les admettrons pour le moment.

- Si $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ est continue sur $I\times J$ alors $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I Pour tout $t \in J$ et $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur J Pour tout $x \in I$.
- La réciproque est fausse comme le montre l'exemple : $(x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$g_1 : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+x}\,\mathrm{d}t\ ; \quad g_2 : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}\ ; \quad g_3 : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x}$$

II | Continuité sous le signe $\int$

Exercice 2

Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$.

Ce dernier exemple montre bien qu'il n'y a aucune raison que la fonction g soit continue malgré la continuité de f par rapport à x.

1 – Théorème de continuité

On a $g(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$. Quelles hypothèses sur f sont suffisantes pour s'assurer de la continuité de f ?

Théorème 12.1 : Continuité sous le signe $\int$

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle ou complexe définie sur $I \times J$ telle que :

- Pour tout $t \in J$, $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.
- Pour tout $x \in I$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur J.
- Il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$ continue et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{(hypothèse de domination)}$$

Alors $g : x \longmapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

- $\varphi(t)$ ne doit en aucun cas dépendre de x !
- C'est un théorème d'interversion de limites :

$$\lim_{x\to x_0} \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = \int_J f(x_0,t)\,\mathrm{d}t = \int_J \lim_{x\to x_0} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Remarquons que l'existence de l'intégrale découle de l'hypothèse de domination.

Exemple

Soit $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

- $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$ car l'intégrale est absolument convergente.
- Ici, $I = \mathbb{R}$ et $J = \mathbb{R}^+$.
  - ⋆ $x \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\sin(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\sin(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
  - ⋆ $\forall (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur J.

  On en déduite que g est continue sur $\mathbb{R}$.
- $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} g(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$.

2 – Extension du théorème

Dans certains cas, il n'est pas possible de « dominer » la fonction f sur l'intervalle I tout entier. On peut cependant se contenter de vérifier l'hypothèse de domination sur tout segment K inclus dans I, le théorème précédent s'applique encore.

Théorème 12.2 : Continuité sous le signe $\int$ - extension

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle ou complexe définie sur $I \times J$ telle que :

- Pour tout $t \in J$, $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.
- Pour tout $x \in I$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur J.
- Pour tout segment $K \subset I$, il existe $\varphi_K : J \to \mathbb{R}_+$ continue et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in K \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_K(t) \quad \text{(hypothèse de domination)}$$

Alors $g : x \longmapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

Exemple

La fonction Γ d'Euler est définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}$.

❶ Montrer que Γ est définie sur $]0,+\infty[$.
$t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Problèmes en 0 et en $+\infty$.

- ⋆ D'une part, en $+\infty$, $e^{-t} t^{x-1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc la fonction est intégrable sur $[1,+\infty[$.
- ⋆ D'autre part, en 0, $e^{-t} t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ donc la fonction est intégrable sur $]0,1]$ ssi $1-x<1$ c'est-à-dire si, et seulement si $x>0$.

Donc Γ est définie sur $]0,+\infty[$.

❷ Montrer que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
Utilisation du théorème de continuité sous le signe $\int$:

- $x \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Mais impossible de dominer la fonction sur I tout entier.
  En effet, si $t<1$ et $x-1>-1$ alors $(x-1)\ln t < -\ln t$ donc,

$$t^{x-1} < t^{-1} \quad \text{et } |e^{-t} t^{x-1}| < \frac{e^{-t}}{t}$$

Cette dernière majoration est optimale mais cette quantité n'est pas intégrable...
Dominons f sur $[a,b]$ où $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a<b$.
Si $x \in [a,b]$ alors $a-1 \leqslant x-1 \leqslant b-1$. Ainsi,

$$t^{x-1} \leqslant \begin{cases} t^{a-1} \text{ si } t \leqslant 1 \\ t^{b-1} \text{ si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

Posons alors :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad \varphi(t) = \begin{cases} e^{-t} t^{a-1} \text{ si } t<1 \\ e^{-t} t^{b-1} \text{ si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

L'application φ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

3 – Cas particulier d'une intégrale sur un segment

Lorsque que l'intervalle d'intégration est un segment, sous hypothèse de continuité de f, la fonction g est automatiquement continue.

Admettons là encore un résultat du prochain chapitre : si $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[c,d]\times[a,b]$ (fermé borné de $\mathbb{R}^2$) alors f est bornée, *i.e.* :

$$\exists M \geqslant 0\ \forall (x,t) \in [c,d]\times[a,b]\ |f(x,t)| \leqslant M$$

Théorème 12.3

Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ continue sur $I \times [a,b]$ avec I intervalle quelconque.

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt$ est définie et continue sur I.

Ce théorème doit être redémontré avant chaque utilisation.

Démonstration

- f continue sur $I\times[a,b]$ donc continue par rapport à t et par rapport à x.
- $t\mapsto f(x,t)$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc intégrable.
- L'hypothèse de domination est vérifiée au moins sur tout segment $[c,d]\subset I$:

$$\forall(x,t)\in[c,d]\times[a,b]\ |f(x,t)|\leqslant M_{c,d}=\varphi_{[c,d]}$$

Exercice 3

❶ Montrer que $x\mapsto\displaystyle\int_0^1\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

❷ En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$ avec $u_n=\displaystyle\int_0^{1/n}\frac{n\cos t}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

III | Dérivabilité sous le signe $\int$

Théorème 12.4 : Dérivabilité sous le signe $\int$

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle ou complexe définie sur $I\times J$ telle que :

- Pour tout $t\in J$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- Pour tout $x\in I$, $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable et $t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J.
- Il existe $\varphi:J\to\mathbb{R}_+$ continue et intégrable sur J telle que :

$$\forall(x,t)\in I\times J,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\varphi(t)$$

Alors $g:x\mapsto\displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall x\in I\quad g'(x)=\int_J\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

- L'hypothèse de domination porte sur $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et non pas f.
- C'est encore un théorème d'interversion de limites.
- On peut se contenter d'une domination sur tout segment inclus dans I.

Exemple

Soit $g:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$. g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer g'.
On peut appliquer le théorème précédent car $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue par rapport à chacune de ses variables, l'intégrabilité de $t\mapsto f(x,t)$ a déjà été justifié et enfin,

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant t\mathrm{e}^{-t}$$

donc l'hypothèse de domination est vérifiée.
g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

Comme dans le paragraphe précédent, si J est un segment, l'hypothèse de domination est automatiquement vérifiée car $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[c, d] \times [a, b]$ donc bornée.

Exercice 4

Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Retour à la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$. $\mathscr{D}_\Gamma = \mathbb{R}_+^*$

❶ Montrer que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer Γ'.

$\forall (x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \ln t\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}$ et même $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = \ln^k t\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}$.

- $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu) et c'est le cas pour $t \mapsto \ln t\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}$.
  En effet, en $+\infty$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et en 0, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t) \sim \dfrac{\ln t}{t^{1-x}}$ (intégrale de Bertrand)
- Hypothèse de domination : Soit $\varphi(t) = \begin{cases} \ln t\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{a-1} & \text{si } t < 1 \\ \ln t\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{b-1} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$.
  $\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. (intégrale de Bertrand)

Donc Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

❷ Généralisation : Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en utilisant le même principe de domination.