6 Intégrales généralisées

« Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir. »
Henri Poincaré (1902)

Plan de cours

► Quelques éléments historiques

La mesure de la longueur d'une courbe et de l'aire d'une surface est un problème essentiel et récurrent chez les Grecs. Mesurer, c'est avant tout comparer des longueurs en calculant leurs rapports. Des méthodes d'exhaustion sont mises en place à cette époque et permettent de répondre avec succès à certains problèmes de recherche d'aires à l'aide d'encadrements successifs. Ces travaux sont repris et développés plus tard par les Arabes puis par d'autres mathématiciens comme Fermat ou Laplace. On peut dire qu'à ce stade, l'intégration, ou plutôt les techniques de quadrature et de rectification, sont avant toute chose une affaire de géomètres ! Newton et Leibniz mettent en place, au cours du XVII^e siècle, les fondements du calcul différentiel et intégral à travers l'étude des variations infinitésimales de quantités mathématiques. Ils sont les premiers à faire le lien entre dérivation et intégration. C'est d'ailleurs chez Leibniz que l'on voit apparaître pour la première fois la notation $x = \int \mathrm{d}x$. Ces théories ne sont pourtant que des colosses aux pieds d'argile : elles reposent sur des notions mal définies et encore mal comprises comme les nombres ou les fonctions. Cela ne nuit en rien à l'expansion du calcul infinitésimal au cours des XVII^e et XVIII^e siècles. Les mathématiciens échouent dans un premier temps à définir la véritable nature des infiniment petits qu'ils manipulent mais ils cherchent cependant petit à petit à s'extraire de la géométrie comme base de ce nouveau calcul. Cauchy s'interroge dans son « *Résumé des leçons données à l'École Polytechnique* » (1823) sur l'existence d'une intégrale avant de s'intéresser à ses diverses propriétés. Il y définit sa propre intégrale dans une version relativement proche de celle étudiée l'an dernier. C'est également lui qui propose une première démonstration rigoureuse du théorème fondamental du calcul intégral. Que de chemin parcouru !
Riemann développe sa propre théorie de l'intégration qu'il présente en 1854 pour sa thèse d'habilitation à l'Université de Göttingen. Elle présente l'avantage de s'étendre à toute fonction continue, continue par morceaux et plus généralement à toute fonction dite réglée. Échappe cependant à cette théorie toute une batterie de fonctions (l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ par exemple) et la démonstration de certains résultats de convergence s'avère très technique. Les notions de mesure et de tribus voient peu à peu le jour. Les idées novatrices de Lebesgue, présentées au cours de sa thèse en 1902, conduisent à la naissance d'une nouvelle théorie de l'intégration qui porte désormais son nom. Mais l'histoire ne s'arrête pas là... De nouvelles intégrales font tour à tour leur apparition. La recherche est encore active en ce domaine !

Bernhard Riemann

Le but de ce chapitre est d'étendre la notion d'intégrale sur un intervalle qui n'est pas nécessairement un segment.

Théorème 6.1 : Rappels

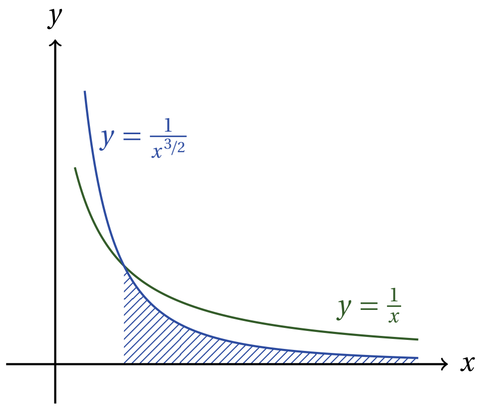
- Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive. En particulier, si f est continue sur un intervalle I, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a. $(a \in I)$
- Si f est continue sur le segment $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.
  De plus, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a;b]$.
- Si f est une fonction continue sur un segment $[a;b]$ alors,

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

I | Intégrales impropres

Comme le lecteur a pu le constater l'an dernier, la notion d'intégrale est intimement liée à la notion d'aire. Ayant toujours pour objectif de « mesurer » l'aire d'un domaine délimité par l'axe des abscisses et une courbe donnée, nous pouvons nous interroger sur la possibilité d'étendre nos résultats au cas d'un intervalle non borné. Bien que le domaine ne soit pas borné, l'aire de ce domaine n'est pas nécessairement infinie, comme le prouve l'un des deux exemples suivants !

Exemples



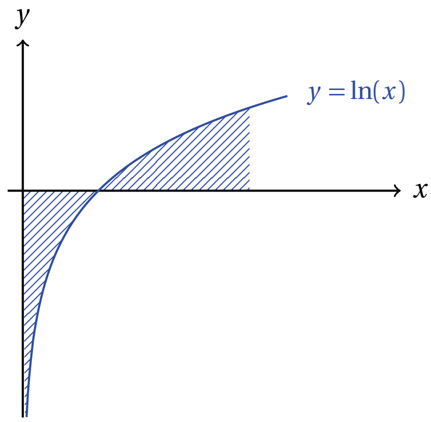
Quel que soit $a \geqslant 1$,

$$\int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|a| \xrightarrow[a \to +\infty]{} +\infty$$

$$\int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}} = \left[\frac{x^{-1/2}}{-1/2}\right]_1^a = 2 - \frac{2}{\sqrt{a}} \xrightarrow[a \to +\infty]{} 2$$

De même, il est possible de donner un sens à l'intégrale d'une fonction non bornée sur un intervalle borné.

Exemple



Quel que soit $a \in]0,1]$,

$$\int_a^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x) - x]_a^1 = a - a\ln(a) - 1 \xrightarrow[a \to 0^+]{} -1$$

On peut ainsi donner un sens « géométrique » à $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ alors que $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$.

A – Généralités

1 – Définition sur un intervalle du type $[a,b[$ ou $]a,b]$

Définition 6.2 : Intégrale impropre

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ avec $b\in\mathbb{R}$ ou $b=+\infty$.
Si $\displaystyle\int_a^x f$ admet une limite finie lorsque x tend vers b^-, on dit que l'intégrale impropre converge et on note $\displaystyle\int_a^b f$ cette limite. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Il y a deux types d'intégrales impropres :

- l'intégrale de fonctions non bornées sur un intervalle borné ($x\mapsto \ln x$ sur $]0,1]$) ;
- l'intégrale de fonctions continues sur un intervalle non borné ($x\mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0,+\infty[$).

On peut étendre la définition précédente au cas $]a,b]$ avec $a\in\mathbb{R}$ ou $a=-\infty$.

Lorsqu'on connaît une primitive de f sur I, il suffit de passer à la limite pour savoir si l'intégrale converge ou diverge, mais cela est plutôt rare. On notera l'analogie avec l'étude de la nature des séries $\sum k$, $\sum z^k$.

Proposition 6.3 : Intégrale faussement impropre

Si une fonction $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ avec $b\in\mathbb{R}$ est continue sur $[a,b[$ et prolongeable par continuité en b, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge et vaut $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}$ où l'on a noté $\tilde{f}$ le prolongement de f.

On pourra alors qualifier une telle intégrale de « faussement » impropre.

Exercice 1

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

2 – Intégrales de référence

Les quatre exemples suivants sont à connaître par cœur, les intégrales en question sont qualifiées d'« intégrales de référence ».

❶ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$

$t\mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Si $\alpha\neq 1$,

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}=\int_1^x t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x=\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha>1\\ +\infty & \text{si } \alpha<1\end{cases}$$

Si $\alpha=1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ et donc :

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha>1$$

❷ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$

Le même calcul conduit à la propriété suivante :

$$\int_0^1\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha<1$$

❸ $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$

La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0,1]$ donc il y a un problème en 0.

Comme $\displaystyle\int_x^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t - t\Big]_x^1 = x - x\ln x - 1 \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge.

❹ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ avec $\alpha > 0$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et :

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha}$$

Donc pour $\alpha > 0$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge.

3 – Définition sur un intervalle du type $]a,b[$

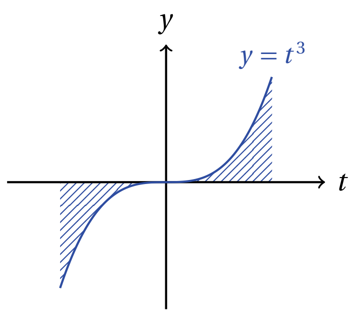
Définition 6.4 : Intégrale impropre

Soit f une application continue sur l'intervalle $]a,b[$. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent quel que soit $c \in]a,b[$.

On étudie alors $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\int_x^c f$ et $\displaystyle\lim_{y\to b^-}\int_c^y f$ pour $c \in]a,b[$.

Attention au passage à la limite ! Pour prouver que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge, il ne suffit pas de calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^x f$.

Exemple



On a, par imparité de $t \mapsto t^3$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_{-x}^x t^3\,\mathrm{d}t = 0 \quad\text{et}\quad \int_{-x}^x t^3\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Alors que $\displaystyle\int_0^x t^3\,\mathrm{d}t = \frac{x^4}{4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Exemple

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ ne converge pour aucune valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Par souci de simplicité, nous travaillerons par la suite uniquement sur des intervalles de la forme $[a,b[$.

B – Propriétés

Proposition 6.5 : Linéarité de l'intégrale

Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent alors $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)$ converge et on a :

$$\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$$

Démonstration

Il suffit d'intégrer sur le segment $[a, x]$ avec $x \in [a, b[$ avant de passer à la limite :

$$\int_a^x (\lambda f + g) = \lambda \int_a^x f + \int_a^x g \quad \text{(linéarité d'une intégrale sur un segment)}$$

$$\xrightarrow[x \to b^-]{} \lambda \int_a^b f + \int_a^b g \in \mathbb{R}$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)$ converge et $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$. ■

Il faut d'abord s'assurer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge sinon l'écriture $\displaystyle\int_a^b f$ n'a pas de sens dans la formule précédente.

Exemple

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 8t + 15}$?

Une décomposition en éléments simples nous fournit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{3, 5\} \quad \frac{1}{t^2 - 8t + 15} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-3}$$

En intégrant, on obtient alors :

$$\int_6^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 8t + 15} = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x-5}{x-3}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{2} \ln 3$$

L'intégrale converge et $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 8t + 15} = \frac{1}{2} \ln 3$. Pourtant, $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t-5}$ et $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t-3}$ divergent !

Attention au résultat suivant :

- si $\displaystyle\int_a^b f$ converge et si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b (f+g)$ diverge ;
- si $\displaystyle\int_a^b f$ diverge et si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge alors on ne peut rien dire.

Ex. : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-\mathrm{d}t}{t}$.

On étend sans difficultés les définitions précédentes au cas d'une fonction à valeurs complexes et on montre alors le résultat suivant.

Proposition 6.6

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. $\displaystyle\int_I \mathrm{Re}(f)$ et $\displaystyle\int_I \mathrm{Im}(f)$ convergent si et seulement si $\displaystyle\int_I f$ converge et alors :

$$\int_I f = \int_I \mathrm{Re}(f) + i \int_I \mathrm{Im}(f)$$

Proposition 6.7 : Relation de Chasles

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ telle que $\int_{]a,b[} f$ converge. Alors, pour tout $c \in]a,b[$,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Dans le cas d'une fonction positive, pour $a < b$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ lorsque l'intégrale converge.

Proposition 6.8

Soit f une fonction *positive* et *continue* sur $[a,b[$. On suppose que $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

$$\int_a^b f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est identiquement nulle sur } [a,b[\quad \Longleftrightarrow \quad \forall t \in [a,b[\ f(t) = 0$$

Attention, ces deux hypothèses sont nécessaires ! L'intégrale d'une fonction continue peut être nulle sans que la fonction soit nulle. De même, l'intégrale d'une fonction positive présentant des discontinuités peut être nulle sans que la fonction soit identiquement nulle.

C – Intégrale impropre d'une fonction positive

On ne peut pas toujours calculer $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ explicitement mais lorsque f est positive, certaines règles permettent d'étudier la nature de l'intégrale. Si f est négative, on travaillera avec $-f$.

L'étude de $\displaystyle\int_a^b f$ est semblable à celle des séries du type $\sum u_n$ avec $u_n \geqslant 0$.

Proposition 6.9

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue et positive.
$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in [a,b[\ \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$.

Démonstration

On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. $\forall x \in [a,b[\ F'(x) = f(x) \geqslant 0$ donc F est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, F admet une limite en b^- qui sera finie si et seulement si F est majorée. ■

1 – Règle de comparaison

Théorème 6.10 : Comparaison

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I telles que $0 \leqslant f \leqslant g$.
$\displaystyle\int_I g$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\int_I f$ converge et alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration

Supposons que $0 \leqslant f \leqslant g$ et que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Par comparaison : $\forall x \in [a, b[\ \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \underbrace{\leqslant}_{g \text{ positive}} \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = M$.

$x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc majorée donc converge.

Par passage à la limite, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$. ■

Corollaire 6.11

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I telles que $0 \leqslant f \leqslant g$. Alors,

$$\int_I f \text{ diverge} \Longrightarrow \int_I g \text{ diverge.}$$

Exercice 2

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$?

Remarquons que cette technique n'est pas valable pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{2+t^3}\,\mathrm{d}t$?

2 – Règle des équivalents

Théorème 6.12 : Équivalents

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I, de signe constant au voisinage de b, telles que $f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$. Alors, $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.

Démonstration

Suppons f positive au voisinage de b. Il existe alors $\alpha \in [a, b[$ tel que :

$$\forall t \in [\alpha, b[\quad \frac{1}{2} g(t) \leqslant f(t) \leqslant \frac{3}{2} g(t)$$

puis on conclut par comparaison. On adapte la preuve dans le cas négatif. ■

Exercice 4

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$? de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$? de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t^2)}{t}\,\mathrm{d}t$?

On prendra soin de vérifier que l'intégrande est de signe constant au voisinage du point considéré.

3 – Comparaison séries/intégrales

Théorème 6.13 : Comparaison séries/intégrales

Soit f une application continue, positive et décroissante sur $[a,+\infty[$.

Alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Une application directe de ce théorème nous donne de nouvelles séries de référence.

Théorème 6.14 : Séries de Riemann

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

Démonstration

Remarquons que pour $\alpha\leqslant 0$, la série $\displaystyle\sum\frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Supposons maintenant $\alpha>0$. Comme $t\mapsto\dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, continue et positive sur $[1,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et la série $\displaystyle\sum\frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature. La série converge donc ssi $\alpha>1$. ■

Exercice 5

Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ au voisinage de $+\infty$.

D – Convergence absolue

Définition 6.15 : Convergence absolue

Soit $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ continue sur $[a,b[$.

On dit que $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente lorsque $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge.

Théorème 6.16

Une intégrale absolument convergente est convergente.

Démonstration

- Soit $f:[a,b[\to\mathbb{R}$. On note $f^+=\max(f,0)$ et $f^-=\max(-f,0)$.

  f^+ et f^- vérifient $0\leqslant f^+\leqslant|f|$ et $0\leqslant f^-\leqslant|f|$ donc $\displaystyle\int_a^b f^+$ et $\displaystyle\int_a^b f^-$ convergent.

  Comme $f=f^+-f^-$, $\displaystyle\int_a^b f$ converge.
- Soit $f:[a,b[\to\mathbb{C}$. On fait de même avec $|\mathrm{Re}(f)|$, $|\mathrm{Im}(f)|$ puis $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$.

■

Définition 6.17 : Semi-convergence

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$.

Si $\displaystyle\int_a^b f$ converge et $\displaystyle\int_a^b |f|$ diverge, on dit que $\displaystyle\int_a^b f$ est semi-convergente.

Exemple

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

- $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Problème en $+\infty$.

  $\forall x \geqslant 1 \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t} = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}$ et cette dernière intégrale converge absolument donc converge. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
- On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} |f|$. Remarquons que $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$. Donc,

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u + k\pi}\,\mathrm{d}u \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{(k+1)\pi}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

  D'où la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$.
- (variante) $\forall t > 1$, $\dfrac{|\sin t|}{t} \geqslant \dfrac{\sin^2 t}{t} = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t}$ diverge, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ converge.

E – Divergence grossière

D'après le chapitre sur les séries numériques, si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

De même, a-t-on $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Longrightarrow f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$? La réponse est NON !

Théorème 6.18 : Divergence grossière à l'infini

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue.

Si f admet une limite non nulle en $+\infty$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Démonstration

Au voisinage de $+\infty$, la fonction est de signe constant et on peut appliquer la règle des équivalents. ■

Contrairement aux séries, on ne peut rien dire lorsque la limite n'existe pas. En effet, l'intégrale peut converger sans que f admette une limite en $+\infty$.

Exemple

Considérer une fonction « triangulaire par morceaux » dont les triangles sont d'aires $1/n^2$, de hauteur 1, centrés sur le milieu du segment $[n, n+1]$.

$$\int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6} - 1$$

II | Calcul intégral

A – Intégration par parties

Supposons que $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b[$. Par intégration par parties, on obtient :

$$\forall x \in [a, b[\quad \int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^x - \int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, si $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)g(x)$ existe et est finie, alors $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature.

Par précaution, on commencera par intégrer entre a et x pour effectuer l'intégration par parties sur un segment puis on passera à la limite.

Exercice 6

> Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converger et déterminer sa valeur.

B – Changement de variable

Rappelons le théorème de changement de variable sur un segment vu l'an dernier.

Théorème 6.19 : Changement de variable sur un segment

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Les choses sont quelque peu différentes lorsque l'on se place sur un intervalle quelconque. La bijectivité de l'application φ est requise !

Théorème 6.20 : Changement de variable sur un intervalle quelconque

Soient f une fonction continue sur $]a, b[$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et en cas de convergence, elles sont égales.

Démonstration

> Sous de telles hypothèses, l'application φ réalise donc une bijection de $]\alpha, \beta[$ dans $]a, b[$. Sa bijection réciproque φ^{-1} est également continue et strictement croissante sur $]a, b[$.
>
> - Supposons la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
>
>   Soit $x \in]\alpha, \beta[$ fixé. Posons alors $c = \varphi(x)$. Pour tout $y \in [x, \beta[$, par changement de variable sur le segment $[x, y]$,
>
> $$\int_x^y f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \underset{t=\varphi(u)}{=} \int_c^{\varphi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t$$
>
>   Comme φ est une bijection croissante, $\varphi(y) \xrightarrow[y \to \beta]{} b$ donc :
>
> $$\int_x^y f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[y \to \beta]{} \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

L'intégrale $\displaystyle\int_x^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge et vaut donc $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

De même, l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^x f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$.

Au final, on a bien montré que $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ et vaut $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

- On montre de même, en utilisant cette fois-ci les propriétés de φ^{-1}, que la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ implique celle de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

■

Dans le cas d'une bijection φ décroissante, la formule s'écrit :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Comme le lecteur l'aura sans doute compris, peu importe la monotonie de φ du moment qu'on prend garde à bien ordonner les bornes des intégrales lors des calculs.

Exercice 7

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$ converge et calculer sa valeur.

III | Fonctions intégrables

A – Définition et propriétés

Définition 6.21 : Fonction intégrable

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que f est intégrable sur I si $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Étudier l'intégrabilité de f sur I revient donc à étudier une intégrale classique sur lun segment ou bien à étudier la convergence *absolue* d'une intégrale impropre.

Si f est intégrable sur I alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 6.22

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue et intégrable, alors :

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$$

Démonstration

L'inégalité a bien un sens d'après le commentaire précédent !
Supposons maintenant que $I = [a, b[$ et que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Rappelons que montrer que $|x| \leqslant y$ revient à montrer que $-y \leqslant x \leqslant y$.
Tout d'abord, pour tout $t \in [a, b[$, $-|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$ et donc, par croissance de l'intégrale,

$$\forall x \in [a, b[\quad -\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

On fait alors tendre x vers b^- pour pouvoir conclure :

$$-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

On admet le résultat dans le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{C}$. ■

Proposition 6.23

L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I est un espace vectoriel.

Démonstration

Montrons pour cela que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$.

- La fonction nulle est bien intégrable sur I.
- Soient $f,g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues et intégrables sur I et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\forall t \in I \quad |0 \leqslant \lambda f(t) + g(t)| \leqslant |\lambda| \cdot |f(t)| + |g(t)|$$

Comme $\displaystyle\int_I |f|$ et $\displaystyle\int_I |g|$ convergent absolument, il en va de même pour $|\lambda f + g|$ par comparaison. ■

B – Comparaison et domination

Lemme 6.24 : Domination

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues telles que :

$$\forall t \in I \quad |f(t)| \leqslant \varphi(t)$$

Si φ est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.

Démonstration

Il s'agit juste de comparer deux fonctions positives. On obtient alors la convergence de $\displaystyle\int_I |f(t)|$. ■

Théorème 6.25 : Règle du petit o et du grand O

Soit $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$. On suppose la fonction g continue et intégrable sur $[a,b[$.

- si $f \underset{b^-}{=} \mathrm{o}(g)$ alors f est intégrable sur $[a,b[$;
- si $f \underset{b^-}{=} \mathrm{O}(g)$ alors f est intégrable sur $[a,b[$.

Démonstration

Supposons tout d'abord que $f(t) \underset{t\to b^-}{=} \mathrm{o}(g(t))$ avec g intégrable sur $[a,b[$. Alors $\dfrac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow[t\to b^-]{} 0$.
Ainsi, il existe $c \in [a,b[$ tel que :

$$\forall t \in [c,b[\quad \left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| \leqslant 1$$

Et donc, pour $t > c$, $|f(t)| \leqslant |g(t)|$. Il n'y a plus qu'à conclure par comparaison.
Le raisonnement est identique dans le cas où $f \underset{b^-}{=} \mathrm{O}(g)$. ■

Le théorème précédent s'adapte facilement au cas d'un intervalle de la forme $]a,b]$.

Corollaire 6.26

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, +\infty[$.

Si $f(t) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ au voisinage de $+\infty$ avec $\alpha > 1$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge (absolument).

Exercice 8

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$?