Intégrales généralisées

Travaux dirigés #03

Partie A – Intégrales sur un segment

Exercice 1 — Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable proposé, le cas échéant.

$$A=\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x\,;\quad B=\int_0^1\frac{x+2}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x\,;\quad C=\int_0^1\frac{3x+2}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x\,;$$

$$D=\int_{-2}^{1}\frac{-x^3-2x^2+4x+9}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x\,;\quad E=\int_2^3\frac{x^7}{(x^4-1)^2}\,\mathrm{d}x\,;\quad F=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)}\,;$$

$$G=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\,;\quad H=\int_0^1 x\arctan x\,\mathrm{d}x\,;\quad I=\int_0^1(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{4x}\sin(5x)\,\mathrm{d}x\,;\quad K=\int_1^2\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x\,;\quad L=\int_0^{\pi}\frac{\sin^3x\cos x}{1+\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x\quad(u=\cos 2x)\,;$$

$$M=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\quad(u=\pi-x)\,;\quad N=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}\,;\quad O=\int_0^1\frac{\sqrt{2+x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 2 — Déterminer une primitive des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalle(s) de validité :

$$f_1:x\mapsto\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,;\quad f_2:x\mapsto\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,;\quad f_3:x\mapsto\frac{x^2}{\sqrt{5+x^3}}\,;\quad f_4:x\mapsto\frac{x^2}{\sqrt[4]{(x^3+1)^7}}\,;$$

$$f_5:x\mapsto\frac{x}{\cos^2(x)}\,;\quad f_6:x\mapsto\arctan(x)\,;\quad f_7:x\mapsto\arcsin(x)\,;\quad f_8:x\mapsto\ln(1+x^2)\,;$$

$$g_1:x\mapsto\sin^2x\,;\quad g_2:x\mapsto\cos^2x\,;\quad g_3:x\mapsto\sin^2x\cos^3x\,;\quad g_4x\mapsto\sin^4x\cos^2x\,;$$

$$g_5:x\mapsto\sin(\ln(x))\,;\quad g_6:x\mapsto\cos(\ln(x))\,;\quad g_7:x\mapsto\sin(2x)\ln(\tan x).$$

Exercice 3 — Calculer $\displaystyle\int_0^1\left\lfloor 4x+\frac{1}{2}\right\rfloor\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1\sup\left(x,(x-1)^2\right)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 — Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $\displaystyle I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $I_{n+1}-I_n$ et en déduire la valeur de I_n pour tout n.
2. Reprendre la question précédente avec $\displaystyle J_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nx)}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5 — Soient $\displaystyle I=\int_0^{\pi/6}\frac{\cos^2(x)}{\cos(2x)}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle J=\int_0^{\pi/6}\frac{\sin^2(x)}{\cos(2x)}\,\mathrm{d}x$.

Déterminer les valeurs de I et J à l'aide de $I-J$ et $I+J$.

Exercice 6 — Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n$ quand :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}\,;\quad S_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}\,;\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

Exercice 7 — Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $\displaystyle I_n=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge et donner sa limite.
2. Établir que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n=\frac{1}{(n+1)\mathrm{e}}+\frac{I_{n+1}}{n+1}$$
En déduire un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 — On considère les intégrales $\displaystyle J_n=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$ où $n\in\mathbb{N}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$ et en déduire J_0.
2. Montrer que, pour $n\geqslant 1$, $0\leqslant J_n\leqslant\dfrac{1}{n}$; en déduire la limite de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que :
$$\frac{1}{2}(J_n+J_{n+1})\leqslant J_n\leqslant\frac{1}{2}(J_{n-1}+J_n)$$
4. Calculer la valeur de J_n+J_{n+1} en fonction de n.
5. En déduire un équivalent de J_n en $+\infty$.

Exercice 9 — Soient $a>0$, $\varphi\in\mathscr{C}^1([-a,a],\mathbb{R})$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$I_n=\int_{-a}^{a}\frac{1-\cos(nt)}{t}\cdot\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que I_n est bien définie et déterminer sa limite.

Exercice 10 — Montrer que :

$$\frac{\pi^2}{16}\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi^2}{8}$$

Exercice 11 — Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ vérifiant :

$$\forall t\in[a,b],\quad f(a+b-t)=f(t)$$

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. *Application* – Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

Partie B – Intégrales impropres

Exercice 12 — Établir la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes.

$$A=\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\ ;\quad B=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t\ ;\quad C=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\ ;$$

$$D=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}\ ;\quad E=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\ ;\quad F=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t+1}}\ ;$$

$$G=\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t\ ;\quad H=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(at+b)^2}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t\ ;\quad I=\int_0^1\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 13 — Étudier la nature de l'intégrale des intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{u-\sqrt{u}}\ ;\quad I_2=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{1+u^\alpha}\,\mathrm{d}u\ ;\quad I_3=\int_0^{+\infty}\frac{u\sin u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\ ;$$

$$I_4=\int_1^{+\infty}\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)\mathrm{d}u\ ;\quad I_5=\int_0^1\sin\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u\ ;\quad I_6=\int_0^{+\infty}\frac{1-\operatorname{th}(u)}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u\quad(\alpha\in\mathbb{R})$$

Exercice 14 — Étudier la nature des intégrales impropres suivantes.

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x^3+x+1}}\,\mathrm{d}x\ ;\quad\int_1^{+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2+2x}\right)\mathrm{d}x\ ;\quad\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\cos(x)}$$

Exercice 15 — Établir la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$ où $p>0$.

Exercice 16 — Montrer que pour tout $a>0$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln(a)}{a}$$

Exercice 17 — Etablir la convergence des intégrales et calculer :

$$I_n=\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t\quad(\alpha>0)\quad\text{et}\quad J_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$

Exercice 18 — Soit $\alpha\in]0,1]$. Préciser la nature des intégrales :

$$I_\alpha=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\ ;\ J=\int_0^{+\infty}\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\ ;\ K=\int_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$$

🚲 **Exercice 19 —** *Intégrales de Bertrand*
Soit $a>1$. Pour quelles valeurs de $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ l'intégrale suivante converge-t-elle ?

$$I_{\alpha,\beta}=\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\ln^\beta t}$$

Exercice 20 — On pose $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et $J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de I ainsi que de J.
2. Prouver que $I=J$ puis calculer $I+J$. En déduire la valeur de I.

Exercice 21 — Soit $f\in\mathscr{C}([1,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Montrer que pour tout réel $\alpha>0$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 22 — Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que :
$$\int_a^b \frac{e^{-xt}}{t}\,dt = \ln\frac{b}{a} + \int_0^x \frac{e^{-bu}-e^{-au}}{u}\,du.$$
2. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bu}-e^{-au}}{u}\,du$.

Exercice 23 — Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $a < b$ et $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt$.
2. On suppose que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,dx$.

Exercice 24 — On pose pour tout $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $f(x) + \ln(x)$ a une limite finie lorsque $x \to 0^+$.
3. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\cos x}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^{5/2}}\right)$$
4. On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx$. Prouver que l'intégrale converge et calculer I.

Exercice 25 — Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{it^2}\,dt$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x > 0$,
$$f(x) = \frac{1-e^{ix^2}}{2ix} + \frac{1}{2i}\int_x^{+\infty} \frac{1-e^{it^2}}{t^2}\,dt$$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

Exercice 26 — Soit $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt$.

1. Montrer que φ est définie, strictement croissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x, y \in I$.
   a) Montrer que pour tout $t \geqslant 0$,
   $$0 \leqslant |e^{-xt} - e^{-yt}| \leqslant |x-y|\, t e^{-at}$$
   b) En déduire que φ est lipschitzienne sur I et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\varphi(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$ et $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Exercice 27 — Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f possède deux limites ℓ et ℓ' en $\pm\infty$. Justifier l'existence et calculer :
$$\int_{\mathbb{R}} \big(f(t+1) - f(t)\big)\,dt$$

Exercice 28 — On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}\,dt$.

1. Montrer que pour tout $u \in [0, 1]$,
$$\left|\sqrt{1+u} - 1 - \frac{u}{2}\right| \leqslant \frac{u^2}{8}$$
2. En déduire le développement limité à deux termes de $\psi(x)$.
   On pourra poser $t = xu$.

$\boxed{\texttt{CCINP}}$ Exercices 28 et 56.