10 Isométries d'un espace euclidien

« Il faut donc que l'élève se mette en état, d'une part, de pouvoir écrire en analyse tous les mouvements qu'il peut concevoir dans l'espace, et, de l'autre, de se représenter perpétuellement dans l'espace le spectacle mouvant dont chacune des opérations analytiques est l'écriture »
Gaspard Monge – Cours de géométrie descriptive (1746–1818)

Plan de cours

L'objectif de se chapitre est d'étudier les endomorphismes particuliers d'un espace euclidien.

Préliminaires

On considère un espace euclidien – espace préhilbertien de dimension finie – $(E,(.|.))$.
On suppose E de dimension n et on note $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E, *i.e.* $(e_i|e_j)=\delta_{i,j}$.

$$\forall x\in E \quad x=(x|e_1)e_1+\cdots+(x|e_n)e_n=\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i$$

Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. Déterminons sa matrice M dans la base $\mathscr{B}$.

Pour tout $j\in E$, $u(e_j)\in E$ et $u(e_j)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(u(e_j)|e_i)}_{\alpha_{i,j}}e_i$ donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\begin{pmatrix}(u(e_1)|e_1) & \dots & (u(e_n)|e_1)\\ \vdots & & \vdots\\ (u(e_1)|e_n) & \dots & (u(e_n)|e_n)\end{pmatrix}=M$$

Notons C_j la $j^{\text{ième}}$ colonne de M. On a donc $C_j=\begin{pmatrix}(u(e_j)|e_1)\\ \vdots\\ (u(e_j)|e_n)\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}C_i^TC_j&=\sum_{k=1}^{n}(u(e_i)|e_k)\underbrace{(u(e_j)|e_k)}_{\in\mathbb{R}}\\ &=\sum_{k=1}^{n}(u(e_i)|(u(e_j)|e_k)e_k)=\left(u(e_i)|\sum_{k=1}^{n}(u(e_j)|e_k)e_k\right)\\ &=(u(e_i)|u(e_j))\end{aligned}$$

Donc $M^TM=\big((u(e_i)|u(e_j))\big)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$.

I | Matrices orthogonales

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathcal{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ deux base orthonormales de E.
On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} = P$$

avec $e'_j=\sum_{i=1}^{n}(e'_j|e_i)e_i$ et $P_{i,j}=(e'_j|e_i)$.

De même, $e_j=\sum_{i=1}^{n}(e_j|e'_i)e'_i$ donc $(P^{-1})_{i,j}=(e'_i|e_j)$.

On remarque que pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $(P^{-1})_{i,j}=P_{j,i}$ donc $P^{-1}=P^T$.
Ainsi, $P^TP=PP^T=I_n$.

Définition 10.1 : Matrice orthogonale

On appelle matrice orthogonale toute matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^TM=MM^T=I_n$.
On appelle groupe orthogonal l'ensemble des matrices orthogonales noté $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$.

On a : $M^TM=I_n \iff MM^T=I_n$.

Théorème 10.2

- Si M est orthogonale alors M est inversible et $M^{-1}=M^T$.
- Si M est orthogonale alors $\det(M)=\pm1$.

Démonstration

- Immédiat d'après la définition.
- $\det(M^TM)=\det(M)^2=1$ donc $\det(M)=\pm1$. ∎

Définition 10.3

On appelle groupe spécial orthogonal l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant $+1$.
On le note $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$ ou $O_n^+(\mathbb{R})$.

Proposition 10.4

- $O_n(\mathbb{R})\subset GL_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})\subset GL_n(\mathbb{R})$.
- Si $A,B\in O_n(\mathbb{R})$ (resp. $SO_n(\mathbb{R})$) alors $AB\in O_n(\mathbb{R})$ (resp. $SO_n(\mathbb{R})$).
- Si $A\in O_n(\mathbb{R})$ (resp. $SO_n(\mathbb{R})$) alors $A^{-1}\in O_n(\mathbb{R})$ (resp. $SO_n(\mathbb{R})$).

Démonstration

On a déjà prouvé que les matrices orthogonales sont inversibles.

- $\forall M_1,M_2\in O_n(\mathbb{R}),(M_1M_2)^TM_1M_2=M_2^TM_1^TM_1M_2=M_2^TM_2=I_n$ donc $M_1M_2\in O_n(\mathbb{R})$.
- $\forall M\in O_n(\mathbb{R}), M^{-1}=M^T$ et $(M^T)^T(M^T)=MM^T=I_n$ donc $M^{-1}\in O_n(\mathbb{R})$.

Idem pour $SO_n(\mathbb{R})$. ∎

- $M \in O_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow \det(M) = \pm 1$ mais la réciproque est fausse. Ex. : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $M \in O_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow M^T \in O_n(\mathbb{R})$.

Une matrice de passage entre deux bases orthonormales est orthogonale. Réciproquement, une matrice orthogonale peut être vue comme une matrice de passage entre deux bases orthonormales.

Proposition 10.5 : Caractérisation des matrices orthogonales

Une matrice est orthogonale si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- ses vecteurs colonnes forment une famille orthonormale.
- ses vecteurs lignes forment une famille orthonormale.

Démonstration

$$\begin{aligned} M \in O_n(R) \quad &\Longleftrightarrow \quad M^T M = I_n \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad (M^T M)_{i,j} = \delta_{i,j} \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j} = C_i^T C_j = \delta_{i,j} \end{aligned}$$

Le résultat est le même pour M^T donc pour les lignes de la matrice M. ■

Exemple

$$M = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$$

II | Orientation de l'espace, produit vectoriel et produit mixte

1 – Orientation de l'espace

Soient E un espace euclidien, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormales de E. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. On sait que P est orthogonale, c'est-à-dire qu'elle vérifie $P^T P = I_n$ donc $\det P = \pm 1$.

Définition 10.6 : Orientation de l'espace

On dit que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ définissent la même orientation ssi $\det P = 1$.
Orienter l'espace consiste à choisir arbitrairement une base orthonormée de E. Toutes celles qui définissent la même orientation seront dites directes. Les autres indirectes.

Par convention, les bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^3$ sont celles qui respectent la règle des trois doigts (ou règle du tire-bouchon).

2 – Produit mixte

Soient $(E, (.|.))$ un espace euclidient orienté et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée directe de E.

Définition 10.7 : Produit mixte

Soient $x_1, \ldots, x_n$ n vecteurs de E. On appelle produit mixte de ces n vecteurs le scalaire :

$$\det(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = [x_1, \ldots, x_n]$$

Il est indépendant de la base orthonormée $\mathscr{B}$ choisie.

Démonstration

Soit $\mathscr{B}'$ une autre base orthonormée directe de E.

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}'}(x_1,\dots,x_n) &= \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)\\ &= \det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n) \quad \text{car} \quad \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \det(P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}) = +1\end{aligned}$$

On peut interpréter géométriquement le produit mixte :

- dans $\mathbb{R}^2$: $[\vec{u},\vec{v}]$ est l'aire algébrique du parallèlogramme engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- dans $\mathbb{R}^3$: $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ est le volume algébrique du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

3 – Produit vectoriel

On suppose ici que $\dim(E)=3$ et on note $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base orthonormée directe de E.

Définition 10.8 : Produit vectoriel

Soit $x,y\in E$ de coordonnées $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$.

On peut définir le vecteur noté $x\wedge y$ comme le vecteur de coordonnées :

$$\begin{pmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\x_3y_1-x_1y_3\\x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}$$

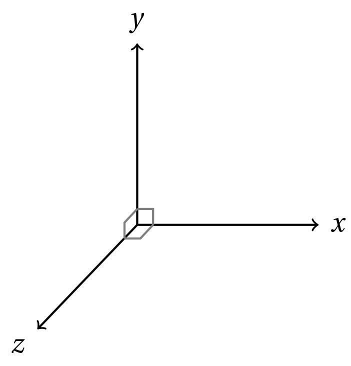
Proposition 10.9

- $x\wedge y \perp x$ et $x\wedge y\perp y$.
- $x\wedge y = 0_E$ ssi (x,y) est liée.
- $(x\wedge y|z)=\det(x,y,z)=[x,y,z]$.

On peut en fait montrer qu'il existe un unique vecteur u tel que :

$$\forall z\in E,\ (u|z)=\det(x,y,z)$$

On le note alors $x\wedge y$.



Théorème 10.10 : Propriétés du produit vectoriel

Soient x, y et z trois vecteurs de E.

- Si x et y ne sont pas colinéaires, $(x,y,x\wedge y)$ est une base directe de E.
- Si (x,y) est une famille orthonormale, $(x,y,x\wedge y)$ est une base orthonormée directe de E.
- Identité de Lagrange : $(x|y)^2+\|x\wedge y\|^2=\|x\|^2\|y\|^2$.
- Double produit vectoriel : $x\wedge(y\wedge z)=(x|z)y-(x|y)z$. *(1 2 3 = 1 3 2 - 1 2 3)*

Si (x,y) est orthonormée, $x\wedge y$ est l'unique vecteur z telle que (x,y,z) soit une b.o.n. directe de E.

III | Isométrie vectorielle

$(E,(.|.))$ désigne de nouveau un espace euclidien quelconque. On note $||\cdot||$ la norme euclidienne associée.

A – Définition et propriétés

Définition 10.11 : Isométrie vectorielle

1. Soit f un endomorphisme de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :
   - f conserve la norme : $\forall x\in E, ||f(x)||=||x||$.
   - f conserve le produit scalaire : $\forall x,y\in E, (f(x)|f(y))=(x|y)$.

   On dit alors que f est un endomorphisme orthogonal ou une isométrie vectorielle de E.
2. On appelle groupe orthogonal de E et on note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Démonstration

- Supposons que f conserve le produit scalaire. Soit $x\in E$.
  $||f(x)||^2=(f(x)|f(x))=(x|x)=||x||^2$ donc f préserve la norme.
- Supposons que f conserve la norme. Soit $x,y\in E$.
  On utilise l'identité de polarisation :

$$\begin{aligned}(f(x)|f(y)) &= \frac{1}{4}\left(||f(x)+f(y)||^2-||f(x)-f(y)||^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(||f(x+y)||^2-||f(x-y)||^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(||x+y||^2-||x-y||^2\right)=(x|y)\end{aligned}$$

f préserve donc le produit scalaire. ■

Isométrie signifie *même mesure* et le terme orthogonal provient du fait que $x\perp y \Longrightarrow f(x)\perp f(y)$.

Exercice 1

Donner un exemple d'isométrie vectorielle de E.
Une projection orthogonale est-elle une isométrie vectorielle ?

Proposition 10.12 : Bijectivité d'une isométrie vectorielle

Une isométrie vectorielle est bijective, c'est un automorphisme.

Démonstration

$(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base orthonormale de E car :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!],\quad (f(e_i)|f(e_j))=(e_i|e_j)=\delta_{i,j}$$

L'image d'une base est une base donc f est un automorphisme de E. ■

Proposition 10.13

- Si $f,g\in O(E)$ alors $f\circ g\in O(E)$.
- Si $f\in O(E)$ alors $f^{-1}\in O(E)$.

Théorème 10.14

Soit F un sous-espace vectoriel stable par $f \in O(E)$. Alors $F^\perp$ est stable par f.

Démonstration

- Supposons que pour tout $x \in F$, $f(x) \in F$. Soit $y \in F^\perp$.
  $(x|y) = 0$ donc $(f(x)|f(y)) = 0$. $f(x) \in F$. Cela signifie-t-il pour autant que $f(y) \in F^\perp$? Non !
- Soit $z \in F$ quelconque. Montrons que $(f(y)|z) = 0$.
  Comme $f_{|F}$ est bijective, il existe $x \in F$ tel que $z = f(x)$. $(z|f(y)) = (x|y) = 0$ donc $f(y) \in F^\perp$. ■

Exercice 2

Déterminer le spectre d'une isométrie vectorielle. Que dire de ses sous-espaces propres ?

Théorème 10.15 : Caractérisation d'une isométrie vectorielle 1

Un endomorphisme est orthogonal ssi l'image d'une base orthonormale est une base orthonormale.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Déjà vu : $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormale de E car $(f(e_i)|f(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Supposons que $\mathscr{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ soit une base orthonormale de E.
Pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$ par linéarité. $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont des b.o.n. donc,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|f(x)\|^2 \text{ (théorème de Pythagore)}$$

f conserve la norme donc $f \in O(E)$. ■

Théorème 10.16 : Caractérisation d'une isométrie vectorielle 2

Un endomorphisme est orthogonal ssi sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale.

Démonstration

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et $\mathscr{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$. Posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

$$\begin{aligned} f \in O(E) &\iff \mathscr{B}' \text{ est une base orthonormale de } E \\ &\iff M \text{ est la matrice de passage d'une b.o.n. à une b.o.n.} \\ &\iff M \in O_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Corollaire 10.17

Si $f \in O(E)$ alors $\det(f) = \pm 1$.

Définition 10.18

- On appelle isométrie positive (resp. isométrie négative) une isométrie de dét. 1 (resp. de dét. -1).
- On appelle groupe spécial orthogonal le groupe des isométries positives noté $SO(E)$ ou $O^+(E)$.

L'image d'une base orthonormale directe est une base orthonormale directe si et seulement si l'application est une isométrie positive.

B – Symétries orthogonales

Définition 10.19 : Symétrie orthogonale

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a $E = F \oplus F^\perp$.
On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.
Si F est un hyperplan de E, on parle alors de réflexion.

Rappels :

1. $s \circ s = \mathrm{id}_E$ donc $s^{-1} = s$. Si $x = \underbrace{x_1}_{\in F} + \underbrace{x_2}_{\in F^\perp}$ alors $s(x) = x_1 - x_2$.
2. $F = E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$: ce sont les éléments invariants par s. $F^\perp = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
3. $\mathrm{Mat}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$ dans une base adaptée.
4. $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$ et $\chi_s = (X-1)^{\dim F}(X+1)^{\dim F^\perp}$. Cas particuliers : $\pm\mathrm{id}_E$.

Théorème 10.20

Une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

Théorème 10.21 : Caractérisation des symétries orthogonales

Une symétrie vectorielle est une symétrie orthogonale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

Démonstration

Supposons que s soit une symétrie vectorielle.
Soit M la matrice de s dans une base orthonormée. On a $M^2 = I_n$ donc $M^{-1} = M$.
s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est de plus orthogonale, c'est-à-dire si et seulement si $M \in O_n(\mathbb{R})$ (base orthonormée). Cela s'écrit encore $M^{-1} = M^T = M$. ■

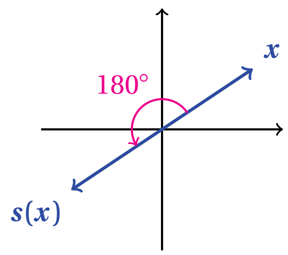
1 – Symétries orthogonales du plan ($E = \mathbb{R}^2$)

⋆ $\dim F = 0$ c'est-à-dire $F = \{0_E\}$.

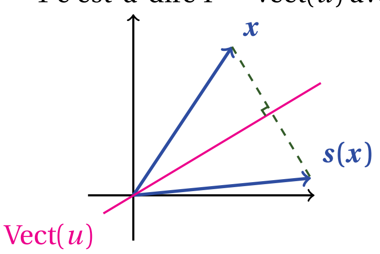
Alors $s = -\mathrm{id}_E$ et dans n'importe quelle base $\mathscr{B}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(isométrie directe)}$$

C'est également une rotation d'angle π.



⋆ $\dim F = 1$ c'est-à-dire $F = \mathrm{Vect}(u)$ avec u non nul.



On a une réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(u)$.
Si $\mathscr{B} = (u, v)$ est une base orthonormée de E,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(isométrie indirecte)}$$

⋆ $\dim F = 2$ c'est-à-dire $F = \mathbb{R}^2$.

$s = \mathrm{id}_E$ et dans n'importe quelle base $\mathscr{B}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (isométrie directe)

Exemple

> Identifier l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.
> $M \in O_2(\mathbb{R})$ et $M^T = M$: M est une symétrie orthogonale.
> $\text{Ker}(M - I_2) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = F$ et $F^\perp = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

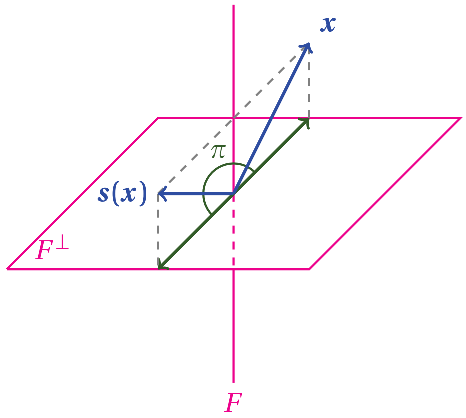
2 – Symétries orthogonales de l'espace ($E = \mathbb{R}^3$)

- $\dim F = 0$, $s = -\text{id}_E$ (isométrie indirecte)
- $\dim F = 1$, c'est-à-dire $F = \text{Vect}(u)$.

  Rotation d'axe $\text{Vect}(u)$ et d'angle π, c'est un retournement.

  Dans une certaine base $\mathscr{B}$,

  $$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(isométrie directe)}$$

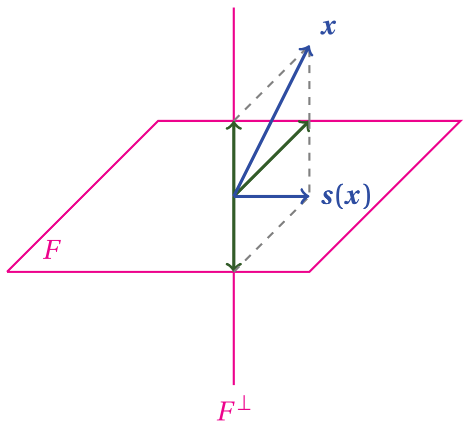


- $\dim F = 2$, c'est-à-dire $F = \text{Vect}(u, v)$.

  s est la réflexion par rapport au plan F.

  Dans une certaine base $\mathscr{B}$,

  $$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(isométrie indirecte)}$$



- $\dim F = 3$, c'est-à-dire $F = \mathbb{R}^3$. $s = \text{id}_E$.

Quelque soit la dimension de E, une réflexion est toujours une isométrie indirecte.

Exemple

> Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :
>
> $$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$
>
> Identifier s.
> $M \in O_2(\mathbb{R})$ et $M^T = M$: M est la matrice d'une symétrie orthogonale.
> $\text{Ker}(M - I_3) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il s'agit donc d'une rotation d'axe $u = \text{Vect}(1, 4, 1)$ et d'angle π.

C – Classification des isométries planes

On cherche dans cette partie à identifier et à interpréter géométriquement les éléments de $O(\mathbb{R}^2)$ et $SO(\mathbb{R}^2)$.
Soit $f \in O(\mathbb{R}^2)$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.
On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$M^T M = I_2 \iff \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = I_2 \iff \begin{cases} a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \\ ab+cd=0 \end{cases}$$

$a^2+c^2=1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} a=\cos\theta \\ c=\sin\theta \end{cases}$ et $b^2+d^2=1 \iff \exists \varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} b=\cos\varphi \\ d=\sin\varphi \end{cases}$.

À ce stade, $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\varphi \\ \sin\theta & \sin\varphi \end{pmatrix}$. De plus, $ab+cd = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = \cos(\theta-\varphi)$.

Donc $ab+cd=0 \iff \theta-\varphi = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi] \iff \varphi = \theta + \varepsilon\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad$ avec $\quad \varepsilon = \pm 1$.

$$\cos\varphi = \cos\left(\theta + \varepsilon\frac{\pi}{2}\right) = -\varepsilon\sin\theta$$
$$\sin\varphi = \sin\left(\theta + \varepsilon\frac{\pi}{2}\right) = \varepsilon\cos\theta$$

D'où $M \in O(\mathbb{R}^2) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}$.

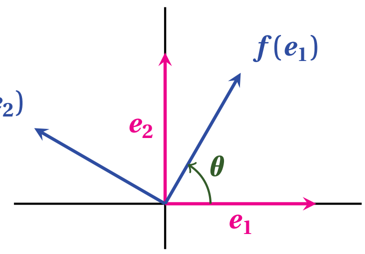
On a alors, $\det(M) = \varepsilon$.

Théorème 10.22 : Isométries du plan

- $M \in O_2(\mathbb{R}) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \sin\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix}$.
- $M \in SO_2(\mathbb{R}) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

⋆ Isométries positives :

$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
Les isométries positives du plan sont les rotations (d'angle θ).
$\chi_M = X^2 - 2\cos\theta X + 1 = (X - \mathrm{e}^{i\theta})(X - \mathrm{e}^{-i\theta})$.
Il n'y a des valeurs propres réelles que pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.



⋆ Isométries négatives : $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$
Comme $M \neq \pm I_2$, les isométries négatives du plan sont les réflexions.

Nature de l'isométrie	déterminant	spectre	s.e. propres	matrice dans une bon qcq
identité	1	$\{1\}$	$E_1 = \mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- identité	1	$\{-1\}$	$E_{-1} = \mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
rotation d'angle θ ($\neq 0, \pi$)	1	$\varnothing$	/	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(u)$	-1	$\{-1, 1\}$	$E_1 = \mathrm{Vect}(u)$ $E_{-1} = E_1^{\perp}$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES DU PLAN

D – Classification des isométries de l'espace

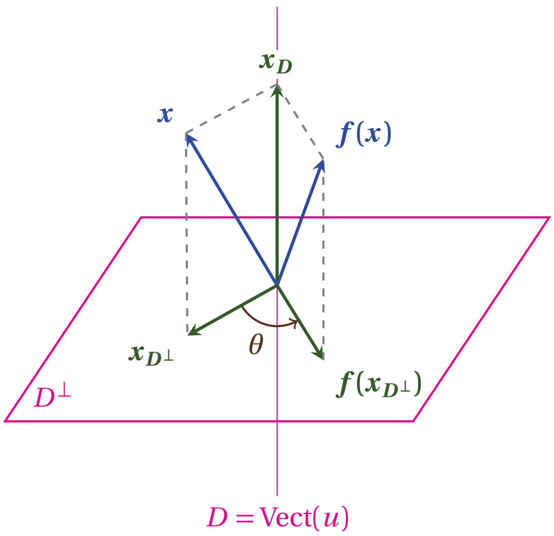
On cherche dans cette partie à identifier et à interpréter géométriquement les éléments de $O(\mathbb{R}^3)$ et $SO(\mathbb{R}^3)$.
Soit $f \in O(\mathbb{R}^3)$. On a :

$$\chi_f = X^3 - \mathrm{Tr}(f)X^2 + \cdots - \det(f)$$

Comme χ_f est un polynôme de degré 3, il admet au moins une racine réelle.
De plus, les racines de χ_f (valeurs propres de f) sont nécessairement de module 1. Ceci prouve que l'un des réels 1 ou -1 est nécessairement racine de χ_f.
De plus, χ_f admet soit une racine réelle et deux racines complexes conjuguées de module 1
soit trois racines réelles (± 1)

- ⋆ Isométries positives ($f \in SO(\mathbb{R}^3)$)
  Dans ce cas, $\det f = 1$. Les 3 racines de χ_f sont donc $1, \mathrm{e}^{i\theta}, \mathrm{e}^{-i\theta}$. (éventuellement multiples)
  Soit u un vecteur propre associé à la valeur propre 1 : $f(u) = u$. On pose $D = \mathrm{Vect}(u)$.
  D est stable par f et donc $D^\perp$ stable par f.
  Dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $E = D \oplus D^\perp$, on a :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$



Comme $M^T M = I_3$, on a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.

De plus, $\det M = 1$ donc $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$.

Ainsi, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

C'est une rotation d'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$ (ou dirigée par u) et d'angle θ. Le signe de θ dépend de l'orientation de $\mathrm{Vect}(u)$. Le choix de $-u$ comme vecteur propre associé à 1 aurait conduit à $-\theta$. Mais comment déterminer θ ?

On peut déjà remarquer que $\mathrm{Tr}(M) = 1 + 2\cos\theta$ ce qui nous permet de déterminer θ au signe près.
On choisira pour u un vecteur unitaire. Soit $v \in D^\perp$ unitaire et $w = u \wedge v$.
(u, v, w) est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. On a alors :

$$\begin{aligned} [u, v, f(v)] &= \det(u, v, f(v)) \\ &= (u \wedge v | f(v)) = (w | \cos(\theta)\cdot v + \sin(\theta)\cdot w) \\ &= \sin(\theta)\cdot(w|w) = \sin(\theta)\cdot \|w\|^2 = \sin(\theta) \end{aligned}$$

- Dans la pratique, comme on connaît $\cos\theta$, seul le signe de $\sin\theta$ nous intéresse.
  On peut donc se contenter de vecteurs non unitaires et calculer le signe du produit mixte.
- Cas particuliers :
  Si $\theta = 0$ alors $f = \mathrm{id}_E$. Si $\theta = \pi$ alors $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
  f est alors une rotation d'angle π par rapport à $\mathrm{Vect}(u)$, c'est un retournement (ou demi-tour).

Plan d'identification :

Soit f l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice A.

- On vérifie que $A^T A = I_3$, *i.e.* $A \in O_3(\mathbb{R})$. f est une isométrie vectorielle.
- On vérifie que $\det(A) = 1$.
  f est une isométrie positive, c'est donc une rotation d'axe dirigée par x et d'angle θ.
- On détermine l'axe $\mathrm{Vect}(u)$ de la rotation en résolvant $AX = X$
- L'angle de la rotation est donné par :
  $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta)$ et $\sin(\theta) = [u, v, f(v)]$ avec $\|u\| = \|v\| = 1$ et $v \in \mathrm{Vect}(u)^{\perp}$.

Exemple

Soit $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

(a) $A^T A = I_3$ et $\det A = 1$. C'est donc une rotation.

(b) $AX = X \iff X \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On pose alors $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'axe de la rotation est $\mathrm{Vect}(u)$.

(c) $\mathrm{Tr}(A) = 2$ donc $\cos\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$ et on montre que $\sin\theta \geqslant 0$. Donc $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

⋆ Isométries négatives ($f \in O^-(\mathbb{R}^3)$)
Dans ce cas, $\det f = -1$. Les 3 racines de χ_f sont donc $-1, \mathrm{e}^{i\theta}, \mathrm{e}^{-i\theta}$. (éventuellement multiples)
On a donc :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

f est donc la composée d'une rotation d'axe dirigé par x et d'angle θ et d'une réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(x)^{\perp}$. Ces deux isométries commutent car les matrices commutent.

Cas particuliers :
Si $\theta = \pi$ alors $f = -\mathrm{id}_E$.
Si $\theta = 0$ alors $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. f est la réflexion d'hyperplan $\mathrm{Vect}(x)^{\perp}$.
Plan d'identification : Soit f l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice A.

- On vérifie que $A^T A = I_3$, *i.e.* $A \in O_3(\mathbb{R})$. f est une isométrie vectorielle.
- On vérifie que $\det(A) = -1$. $A \in O_3^-(\mathbb{R})$ et f est la composée d'une rotation d'axe dirigée par u et d'angle θ et d'une réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(u)^{\perp}$.
- On détermine l'axe $\mathrm{Vect}(u)$ de la rotation en résolvant $AX = -X$ (cas 2).
- L'angle de la rotation est donné par :
  $\mathrm{Tr}(A) = -1 + 2\cos(\theta)$ et $\sin(\theta) = [u, x, f(x)]$ avec $\|x\| = \|u\| = 1$ et $x \in \mathrm{Vect}(u)^{\perp}$.
  Si $\theta = 0$, f est une simple réflexion.

Exemple

Soit $B = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à B.

(a) $B^T B = I_3$ et $\det B = -1$.
C'est donc la composée d'une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(x)$ et d'une réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(x)^{\perp}$.

(b) $BX = -X \iff X \in \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$. On pose alors $x = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$. L'axe de la rotation est Vect x.

(c) $\text{Tr}(B) = \frac{2}{3}$ donc $\cos\theta = \pm\arccos\left(\frac{5}{6}\right)$ et on montre que $\sin\theta = -\frac{\sqrt{11}}{6}$. Donc $\theta = -\arccos\left(\frac{5}{6}\right)$.

Nature de l'isométrie	déterminant	spectre	matrice dans une certaine b.o.n.
identité	1	$\{1\}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
demi-tour	1	$\{1,-1\}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$
rotation d'angle θ $(\neq 0,\pi)$	1	$\{1\}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$
- identité	-1	$\{-1\}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$
réflexion	-1	$\{1,-1\}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
composée rotation/réflexion	-1	$\{-1\}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES DE L'ESPACE

IV | Matrices symétriques réelles

Définition 10.23 : Matrice symétrique réelle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice carrée M d'ordre n à coefficients réels est dite symétrique si $M^T = M$.
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients réels.

Lemme 10.24

Toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles et son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

Démonstration – hors programme

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ supposée symétrique réelle. χ_M est scindé sur $\mathbb{C}$ et $\deg(\chi_M) = n$ donc M admet exactement n valeurs propres complexes (comptées avec leur ordre de multiplicité). Notons X un vecteur propre (éventuellement complexe) associé à une valeur propre λ.

- $\bar{X}^T X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0$ car X est non nul.
- $(\bar{\lambda}-\lambda)\bar{X}^T X = \bar{\lambda}\bar{X}^T X - \lambda\bar{X}^T X = (\overline{MX})^T X - \bar{X}^T M X = \bar{X}^T(\bar{M}^T - M)X = 0$ donc $\bar{\lambda} = \lambda$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Toutes les racines de χ_M sont donc réelles : le polynôme est scindé sur $\mathbb{R}$.
Ceci nous assure au passage l'existence de vecteurs propres à coefficients réels. ■

Proposition 10.25

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux.

Démonstration

Soit $X \in E_\lambda$ et $Y \in E_\mu$ avec λ, μ deux valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique réelle M.
$(MX)^T Y = \lambda X^T Y = Y^T M X = Y^T M^T X = (MY)^T X = \mu Y^T X = \mu X^T Y$. Comme $\lambda \neq \mu$, $X^T Y = 0$.

Théorème 10.26 : Théorème spectral

Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle est diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale :

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \quad P^{-1} M P = P^T M P \text{ diagonale.}$$

Démonstration – (hors programme)

Notons tout d'abord f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M. On cherche à construire une base pour laquelle la matrice de f est diagonale.

- D'après ce qui précède, f admet au moins une valeur propre réelle notée λ. On note e_1 un vecteur propre unitaire associé à λ.
- Complétons (e_1) en une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E.

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & \star & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

- Posons $F = \mathrm{Vect}(e_1)$. F est stable par f. Montrons que $F^\perp$ est stable par f.
  Soit $x \in F^\perp$. Montrons que $f(x) \in F^\perp$.

$$(f(x)|e_1) = (x|f(e_1)) = \lambda(x|e_1) = 0_E$$

  donc $f(x) \in F^\perp$. On peut donc écrire :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{Mat}\left(f_{|F^\perp}\right) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

- L'endomorphisme $f_{|F^\perp}$ étant lui-même symétrique, il admet au moins une valeur propre et on peut poursuivre par récurrence. Les vecteurs propres obtenus seront orthogonaux à e_1.

Le théorème ne s'applique pas lorsque les coefficients de la matrice sont complexes.

Exemple

$M = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$. $\chi_M = X^2$. Si M était diagonalisable, M serait nulle.

Exemple

La matrice $M = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée.

$\chi_M = (X-3)(X-6)(X-9)$ et $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

On détermine le dernier vecteur propre à l'aide du produit vectoriel des deux premiers.
On a $P^{-1} = P^T$. P est la matrice d'une rotation (passage d'une base orthonormée directe à une base orthonormée directe).

V | Application à l'étude des coniques

On munit le plan euclidien orienté d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Définition 10.27 : Conique

On appelle conique l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$(\mathcal{E}) \quad \underbrace{ax^2 + 2bxy + cy^2}_{\text{partie quadratique}} + \underbrace{dx + ey}_{\text{partie linéaire}} + f = 0 \quad \text{avec} \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

en supposant a, b et c non tous nuls.

Nous allons effectuer différents changements de repères (orthonormés) pour obtenir une équation cartésienne simplifiée qui nous permettra d'identifier le type de courbe obtenue.

- **Élimination du terme en xy**

  Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La partie quadratique de l'équation $(\mathcal{E})$ s'écrit alors :

  $$ax^2 + 2bxy + cy^2 = X^T AX$$

  Comme A est une matrice symétrique réelle, A est diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale. On peut donc écrire que :

  $$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = P^{-1}AP \quad \text{avec} \quad P \in SO_2(\mathbb{R})$$

  On constate que $\Delta = \det(A) = ac - b^2 = \lambda\mu$.
  Posons alors $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^T X$. On a donc $X^T AX = X^T PDP^T X = X'^T DX' = \lambda x'^2 + \mu y'^2$.

  L'équation devient alors :

  $$(\mathcal{E}') \quad \lambda x'^2 + \mu y'^2 + \alpha x' + \beta y' + f = 0$$

  C'est l'équation de la conique dans le nouveau repère $\mathscr{R}' = (O, \vec{I}, \vec{J})$ obtenu par rotation.
  Remarquons que par hypothèse, $(a, b, c) \neq 0$ donc $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

- **Élimination de la partie linéaire**

  Nous allons essayer d'éliminer le terme $\alpha x' + \beta y'$ par mise sous forme canonique.

  (i) Supposons que $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$.
  L'équation $(\mathcal{E}')$ peut s'écrire :

  $$\lambda \cdot \left(x' + \frac{\alpha}{2\lambda}\right)^2 + \mu \cdot \left(y' + \frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + \left(f - \frac{\alpha^2}{4\lambda} - \frac{\beta^2}{4\mu}\right) = 0$$

  Ce qui peut encore s'écrire :

  $$(\mathcal{E}_1'') \quad \lambda x''^2 + \mu y''^2 = \xi$$

  en posant $X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + \frac{\alpha}{2\lambda} \\ y' + \frac{\beta}{2\mu} \end{pmatrix} = X' + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2\lambda} \\ \frac{\beta}{2\mu} \end{pmatrix}$.
  C'est l'équation de la conique dans le nouveau repère $\mathscr{R}'' = (\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ obtenu par translation avec Ω le point de coordonnées $\left(-\dfrac{\alpha}{2\lambda}; -\dfrac{\beta}{2\mu}\right)$ dans le repère $\mathscr{R}'$.
  Cette équation qui ne peut être simplifiée est qualifiée d'*équation réduite* de la conique.

(ii) Supposons que $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$.
En procédant de la même manière, nous obtiendrions l'équation réduite :

$$(\mathcal{E}_2'') \quad \lambda x''^2 + \beta y'' = \xi$$

Le cas $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$ est analogue.

- **Équations réduites obtenues :**

$\lambda, \mu \neq 0$	$\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$	$\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$
$(\mathcal{E}_1'') \quad \lambda x^2 + \mu y^2 = \xi$	$(\mathcal{E}_2'') \quad \lambda x^2 + \beta y = \xi$	$(\mathcal{E}_3'') \quad \mu y^2 + \alpha x = \xi$

Équations réduites possibles

(i) Si $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, il y a trois possibilités :
   – Si $\xi > 0$ alors l'équation peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   La courbe est alors appelée *ellipse*.
   – Si $\xi = 0$, le seul couple solution de l'équation est $(0, 0)$. La conique est réduite à un point.
   – Si $\xi < 0$, il n'y a pas de solution. On obtient l'ensemble vide.

(ii) Si $\lambda < 0$ et $\mu < 0$, il y a deux possibilités :
   – Si $\xi \neq 0$ alors l'équation peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

   La courbe est alors appelée *hyperbole*.
   – Si $\xi = 0$ alors l'équation peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$$

   La conique obtenue est donc la réunion de deux droites.

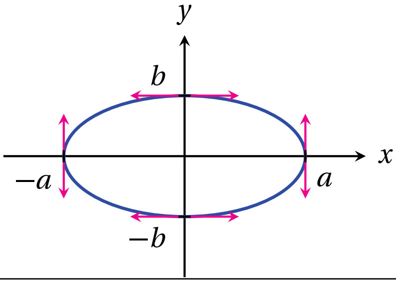
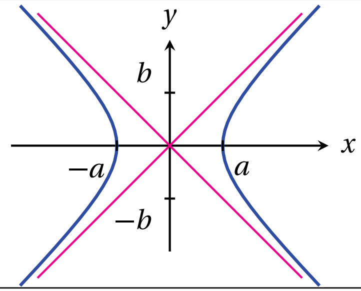
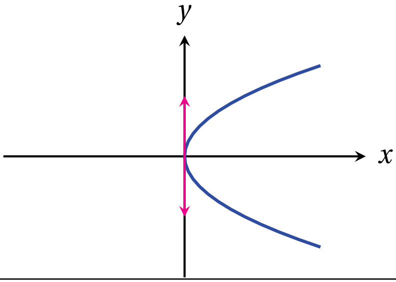
(iii) Si $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$, il y a là encore plusieurs possibilités.
   – Si $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ et $\beta \neq 0$ alors l'équation peut s'écrire $y^2 = 2px$.
   Le cas $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$ et $\alpha \neq 0$ est analogue. Dans les deux cas, la courbe est alors appelée *parabole*.
   – Si $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$ et $\beta = 0$ alors l'équation devient $\lambda x^2 = \xi$ Selon le signe de ξ, on obtient la réunion de deux droites parallèles, une droite ou bien l'ensemble vide.

Proposition 10.28

On appelle discriminant de l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ définissant la conique $\mathcal{C}$ le réel $\Delta = b^2 - ac = -\det(A)$.
On suppose de plus a, b, c non tous nuls. Alors,

- si $\Delta < 0$, $\mathcal{C}$ est une ellipse, un point ou l'ensemble vide ;
- si $\Delta = 0$, $\mathcal{C}$ est une parabole, une droite, la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide ;
- si $\Delta > 0$, $\mathcal{C}$ est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.

Si la courbe obtenue est une ellipse, une parabole, une hyperbole, on parle de « *conique propre* ». Sinon, on parle de « *conique dégénérée* ».

Nature	Équation réduite	Paramétrage	Représentation
Ellipse	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x(t)=a\cos(t) \\ y(t)=b\sin(t) \end{cases}$	
Hyperbole	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x(t)=\pm a\,\mathrm{ch}(t) \\ y(t)=b\,\mathrm{sh}(t) \end{cases}$	
Parabole	$y^2=2px$	$\begin{cases} x(t)=\dfrac{t^2}{2p} \\ y(t)=t \end{cases}$	

Exercice 3

Déterminer les axes de symétries des différentes coniques propres et faire le lien avec les vecteurs propres de la matrice A.

Exemple

Identification de la conique d'équation $25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0$.

- On pose $M=\begin{pmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 25 \end{pmatrix}$. On a $\det(M)=24^2>0$.
  La courbe est donc une ellipse ou bien réduite à un point ou vide.
- Élimination du terme en xy :
  La trace et le déterminant de M nous donnent directement les valeurs propres 18 et 32.

  On trouve alors $P=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, rotation d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$.

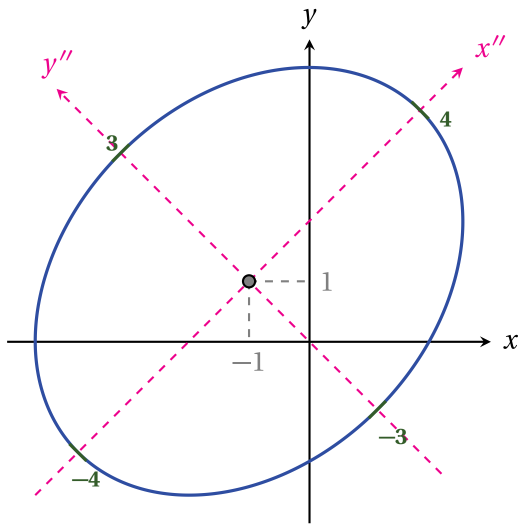
  Posons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On trouve :

$$18x'^2+32y'^2-\sqrt{2}64y'-224=0$$

- Élimination de la partie linéaire :
  Il ne reste plus qu'à changer l'origine du repère en posant $x''=x'$ et $y''=y'-\sqrt{2}$ et on obtient après simplification :

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1 \text{ avec } a=4 \text{ et } b=3$$

- Représentation de l'ellipse dans le repère initial :



On peut également choisir de commencer par la translation en posant $X = x - \alpha$ et $Y = y - \beta$. On injecte ces expressions dans l'équation et on cherche α et β pour éliminer les termes en x et y (lorsque cela est possible) et on effectue alors une rotation pour éliminer le terme en xy.

Exercice 4

Montrer que la courbe d'équation $x^2 + 4xy - 2y^2 + 2x - 4y = 11$ est une hyperbole et la représenter.