7 Probabilités discrètes

« Un coup de dé jamais n'abolira le hasard »
Stéphane Mallarmé (1914)

Plan de cours

I Dénombrement **1**
A Cardinal d'un ensemble fini 1
B Listes, arrangements, combinaisons et permutations 3
II Probabilités discrètes **6**
A Ensembles dénombrables et non dénombrables (⋆) 6
B Espaces probabilisés (⋆) 8
C Cas d'un univers fini, probabilité uniforme 12
D Cas d'un univers dénombrable (⋆) 13
E Conditionnement 16
F Indépendance 20

I | Dénombrement

A – Cardinal d'un ensemble fini

Définition 7.1

Un ensemble E est un dit fini s'il est vide ou s'il existe un entier naturel n non nul et une bijection de E dans $[\![1,n]\!]$. L'entier n est alors appelé cardinal de E et noté $\operatorname{card}(E)$. Par convention, $\operatorname{card}(\varnothing)=0$.

Le cardinal d'un ensemble fini correspond intuitivement à son nombre d'éléments.

Il peut exister plusieurs bijections entre E et $[\![1,n]\!]$ (il y en a exactement $n!$) mais un tel entier n est unique. Donner une telle bijection revient à énumérer (compter) les éléments de E. Si E contient n éléments, on pourra alors poser $E=\{x_1,\dots,x_n\}$.

On peut également montrer que deux ensembles finis E et F ont même cardinal si et seulement s'il existe une bijection entre E et F.

Exercice 1

Déterminer le cardinal de E dans les trois cas suivants :

$$E=[\![0,n]\!] \quad (n\in\mathbb{N})\,; \quad E=[\![-n,n]\!] \quad (n\in\mathbb{N})\,; \quad E=[\![p,q]\!] \quad \text{où} \quad (p,q)\in\mathbb{Z}^2 \quad \text{et} \quad p\leqslant q.$$

Théorème 7.2

Soient E et F deux ensembles finis disjoints, c'est-à-dire que $E\cap F=\varnothing$.
$E\cup F$ est alors un ensemble fini et $\operatorname{card}(E\cup F)=\operatorname{card}(E)+\operatorname{card}(F)$.

Corollaire 7.3

Si $E_1,\dots,E_n$ sont n ensembles deux à deux disjoints, alors $E_1\cup\cdots\cup E_n=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{card}(E_k).$$

Proposition 7.4

Soit $F \subset E$ avec E est un ensemble fini. Alors F est un ensemble fini et $\text{card}(F) \leqslant \text{card}(E)$.
De plus, $\text{card}(F) = \text{card}(E)$ si et seulement si $F = E$.

S'en suivent un certain nombre de propriétés.

Proposition 7.5 : Opérations sur le cardinal

Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E. On a alors :

(i) $\text{card}\left(\overline{A}\right) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$;

(ii) $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$;

(iii) $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$;

Exercice 2

• Dans une classe, 25 élèves suivent des cours d'anglais, 12 des cours d'espagnols et 8 les deux cours de langues. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?
• Dans une classe de 36 élèves, 22 élèves pratiquent l'anglais, 18 l'espagnol, 22 l'allemand, 10 suivent les cours d'anglais/allemand, 9 d'allemand/espagnol et enfin 11 d'anglais/espagnol. Combien d'élèves pratiquent trois langues vivantes ?

Lemme 7.6 : Principe des bergers

Soit $A_1, \dots, A_n$ une partition d'un ensemble fini E. On suppose que tous ces ensembles ont même cardinal k. On a alors $\text{card}(E) = nk$.

Exemple

Un berger peut connaître le nombre de pattes dans son troupeau en comptant le nombre de moutons, cette formule ne dit rien de plus. Réciproquement, il « suffit » de compter le nombre de pattes dans le troupeau pour connaître le nombre de moutons !

Rappelons que le produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples de la forme (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.

Proposition 7.7

On considère deux ensembles finis E et F. Alors le produit cartésien $E \times F$ est un ensemble fini et on a $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Corollaire 7.8

Si $E_1, \dots, E_n$ sont n ensembles fini, alors $E_1 \times \dots \times E_n = \prod_{k=1}^{n} E_k$ est un ensemble fini et on a de plus

$$\text{card}\left(\prod_{k=1}^{n} E_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \text{card}(E_k).$$

En particulier, $\text{card}(E^p) = \text{card}(E)^p$.

Exemples

On tire successivement avec remise des cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Quel est le nombre de possibilités de tirer un roi puis une dame lors de deux tirages ?
2. Quel est le nombre de possibilités de tirer un roi puis une dame puis un pique lors de trois tirages ?

Théorème 7.9

Soient E et F deux ensembles finis.

(a) S'il existe une injection de E dans F alors $\text{card}(E) \leqslant \text{card}(F)$.

(b) S'il existe une surjection de E dans F alors $\text{card}(E) \geqslant \text{card}(F)$.

(c) S'il existe une bijection de E dans F alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.

B – Listes, arrangements, combinaisons et permutations

La résolution d'un problème de dénombrement conduit bien souvent à représenter une situation donnée au moyen de graphes, de mots ou de tout autre objet permettant d'énumérer une certaine *liste de possibilités*. Une fois traduit en langage mathématique, la résolution d'un tel problème se ramènera immanquablement au calcul du cardinal d'un ensemble bien identifié. Cette étape de modélisation est essentielle au calcul de probabilités.

Exemples

• Une urne contient des boules noires et des boules blanches. Le tirage successif d'une boule blanche, puis d'une boule noire et enfin d'une boule blanche peut être représenté par le mot BNB. L'ensemble des tirages possibles de trois boules est alors : $\{BBB, NBB, BNB, NNB, NBN, BBN, BNN, NNN\}$. On constate qu'il y a $8 = 2 \times 2 \times 2$ possibilités.
• On pioche cinq cartes simultanément parmi un jeu de 32 cartes. Une « main » possible est : {As$\heartsuit$, R$\clubsuit$, 8$\clubsuit$, D$\diamondsuit$, 9$\heartsuit$}. Noter que contrairement au cas précédent, l'ordre n'a pas d'importance et la main {R$\clubsuit$, As$\heartsuit$, D$\diamondsuit$, 8$\clubsuit$, 9$\heartsuit$} est identique.

On considère désormais un ensemble fini E à n éléments et un entier naturel p.

1 – Listes et uplets

Définition 7.10

On appelle p-uplet ou p-liste de E toute famille de p éléments de E, c'est-à-dire un élément de E^p.

On a vu précédemment que $\text{card}(E^p) = n^p$. Cela revient à dire qu'il y a exactement n^p p-uplets de E.

Exemple

On tire trois cartes avec remise dans un jeu comportant 32 cartes. Il y a alors 32^3 tirages possibles.

Proposition 7.11

Le nombre d'applications d'un ensemble de cardinal n dans un ensemble de cardinal p vaut n^p.

2 – Arrangements

Définition 7.12 : Arrangement

On appelle arrangement de p éléments de E un p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ constitué d'éléments de E deux à deux distincts, c'est-à-dire vérifiant la condition :

$$\forall i, j \in [\![1, p]\!] \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$$

Exemple

Si $E = \{1, 2, 3\}$, les arrangements de deux éléments sont : $(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1)$ et $(3,2)$.

Théorème 7.13 : Nombre d'arrangements

On suppose que $1 \leqslant p \leqslant n$.

Le nombre d'arrangements de p éléments de E vaut $\dfrac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$.

C'est le nombre de façons de choisir p éléments ordonnés parmi n.

Démonstration

On peut procéder par récurrence ou, plus simplement, de la façon suivante.
Choisir un arrangement $(x_1, \ldots, x_p)$ de E revient à choisir x_1 parmi n éléments, puis x_2 parmi $n-1$ éléments, ..., jusqu'à x_p parmi les $n-p+1$ éléments restants. Au final, $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$ possibilités. ■

Exercice 3

Une association comportant 27 membres doit élire un président, un secrétaire et un trésorier. Quel est le nombre de possibilités ?

À chaque arrangement $(x_1, \ldots, x_p)$ de E, on peut associer de manière unique l'application $f : [\![1, p]\!] \to E$ définie par $f(i) = x_i$. L'application est injective, ce qui conduit au résultat suivant.

Proposition 7.14

Si E est de cardinal p et F de cardinal n, le nombre d'applications injectives de E dans F est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

3 – Permutations

Définition 7.15 : Permutation

On appelle permutation de E un arrangement de E à n éléments.

Exemple

Si $E = \{1, 2, 3\}$, les permutations de E sont $(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2)$ et $(3,2,1)$.

Théorème 7.16 : Nombre de permutations

Le nombre de permutations de l'ensemble E est $n!$.

À chaque permutation $(x_1, \ldots, x_n)$ de E, on peut associer de manière unique l'application $f : [\![1, n]\!] \to E$ définie par $f(i) = x_i$. L'application étant injective, elle est bijective ; d'où le résultat suivant.

Proposition 7.17

Il y a $n!$ bijections de E dans E.

Exercice 4

- Combien existe-t-il d'anagrammes du mot *MARIN* ? du mot *VOILIER* ?
- Combien peut-on fabriquer de colliers distincts avec 5 perles de couleurs différentes ?

4 – Combinaisons

Définition 7.18 : Combinaison

On appelle combinaison de p éléments de E un sous-ensemble de E contenant p éléments.

Dans une combinaison, il n'y a pas d'ordre des éléments contrairement aux p-uplets.

Exemple

Si $E = \{1, 2, 3\}$, les combinaisons de deux éléments sont : $\{1, 2\}, \{1, 3\}$ et $\{2, 3\}$.

Théorème 7.19 : Nombre de combinaisons

On suppose que $1 \leqslant p \leqslant n$.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E vaut $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démonstration

Considérons une combinaison $\{x_1, \dots, x_p\}$ à p éléments de E. On peut alors lui associer $p!$ arrangements distincts. Réciproquement, à un arrangement donné, on ne peut lui associer qu'une seule combinaison. Ainsi, si on note C_n^p le nombre de combinaisons de E à p éléments, $\dfrac{n!}{(n-p)!} = p! C_n^p$ et donc :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

On pourra formaliser la preuve à l'aide du lemme des bergers. ■

Proposition 7.20 : Propriétés des coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}$ et un entier $p \in [\![1, n]\!]$.

(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n$ (ii) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

(iii) $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$ (iv) $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Démonstration

Il s'agit ici de présenter une preuve combinatoire de résultats que l'on peut également justifier par récurrence.

(i) Il y a n choix possibles quand on tire 1 élément parmi n donc $\binom{n}{1} = n$.

(ii) Choisir p éléments parmi n revient à choisir les $n-p$ autres donc on a $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

(iii) Il y a $p\binom{n}{p}$ façon de choisir p éléments parmi n puis un élément parmi ceux-là. Cela revient exactement à choisir un élement parmi les n puis à « compléter » en choisissant $p-1$ éléments parmi les $n-1$ restants. Ce qui nous donne bien la formule annoncée !

(iv) Soient E un ensemble à n éléments et $x \in E$. Les parties de E à p éléments sont de deux types : celles qui contiennent x et sont constituées de $p-1$ autres éléments choisis parmi les $n-1$ restants ; celles qui ne contiennent pas x et qui sont constituées de p éléments choisis parmi les $n-1$ restants. Elles forment deux ensembles disjoints donc $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$.

(v) Toute partie de E étant une combinaison de E, les ensembles de combinaisons de p éléments de E constituent une partition de $\mathscr{P}(E)$, ce qu'on peut écrire sous la forme $\mathscr{P}(E) = \displaystyle\bigsqcup_{p=1}^{n} \mathscr{C}^p(E)$ où $\mathscr{C}^p(E)$ désigne l'ensemble des combinaisons de p éléments.
En passant au cardinal, on obtient l'égalité demandée. ■

On remarquera que pour $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$; on ne peut pas construire d'ensemble à p éléments avec seulement n éléments.

Corollaire 7.21 : Cardinal de l'ensemble des parties

Si E est un ensemble fini de cardinal n, $\operatorname{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.

Exercice 5

On dispose d'un jeu classique de 32 cartes et on en distribue 8 à 4 joueurs.

- Combien y a-t-il de jeux possibles par joueur ?
- Combien y a-t-il de jeux contenant 6 cartes rouges ?

Exercice 6

Démontrer la formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$.

II | Probabilités discrètes

A – Ensembles dénombrables et non dénombrables (⋆)

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, deux ensembles finis ont même cardinal si et seulement s'il existe une bijection entre les deux. Qu'en est-il dans le cas d'ensembles infinis ? Comment comparer leur nombre d'éléments ? Il suffit pour cela de savoir s'ils possèdent le « même nombre d'éléments », c'est-à-dire si l'on peut établir une bijection entre les deux. Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux ensembles en bijection avec $\mathbb{N}$. Pour cela, introduisons la définition suivante.

Définition 7.22 : Ensemble dénombrable

Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.
Il sera dit *au plus* dénombrable s'il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

Si E est un ensemble dénombrable, il existe alors une application $\varphi : \mathbb{N} \to E$ bijective qui nous permet d'écrire :

$$E = \{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ en posant } x_n = \varphi(n)$$

On peut donc ordonner (ou numéroter) les éléments de E. Nous verrons par la suite tout l'intérêt d'une telle indexation qui permettra entre autre de définir des sommes et des produits infinis d'éléments de E. Le cas d'ensembles au plus dénombrables est analogue, il suffit de considérer une suite dont tous les termes seraient nuls à partir d'un certain rang.

L'ensemble $\mathbb{N}$ est bien entendu dénombrable puisqu'en bijection avec lui-même (en considérant par exemple l'identité). Donnons maintenant quelques exemples moins triviaux (et plus surprenants !) d'ensembles dénombrables.

Proposition 7.23

L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.

Démonstration

Il suffit de considérer l'application bijective $f : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}\right.$ ■

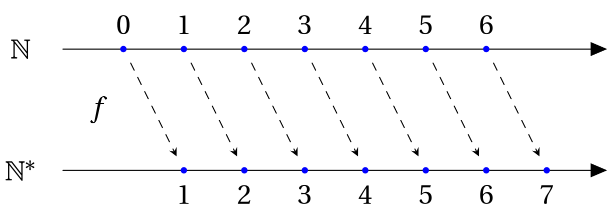


Illustration d'un exemple de bijection entre $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{N}^*$

Bien que $\mathbb{N}^*$ soit strictement plus *petit* que $\mathbb{N}$ au sens de l'inclusion, les deux ensembles ont cependant la même *taille*, ils sont dits équipotents.

Proposition 7.24

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Démonstration

Comme l'illustre le schéma suivant, numérotons les entiers relatifs en considérant la suite naturelle d'entiers : $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$
On pose pour cela $f(k) = 2k$ si k est positif ou nul, $f(k) = -(2k+1)$ si k est négatif. Il ne reste plus qu'à prouver que f réalise une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$. ■

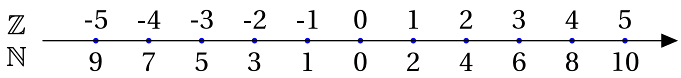


Illustration d'un exemple de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Proposition 7.25

L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration

Là encore, une figure s'impose pour imaginer une telle bijection. Nous devons associer à chaque couple d'entiers de la forme (i, j) un et un seul entier noté $f(i, j)$. L'idée consiste ici à numéroter les couples d'entiers le long des diagonales d'équations $i + j = k$ pour k parcourant $\mathbb{N}$.
Cherchons maintenant à expliciter la bijection recherchée.

- La $k^{\text{ième}}$ diagonale comporte $k+1$ éléments, il s'agit des couples $(k,0), (k-1,1), \ldots, (0,k)$.
- Le premier élément de cette diagonale porte le numéro $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$.
- Le $(j+1)^{\text{ième}}$ porte donc le numéro $\dfrac{k(k+1)}{2} + j$.
- Autrement dit, on associe au couple (i, j) l'entier naturel $f(i, j) = \dfrac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j$.

Il reste alors à vérifier que l'application f réalise bien une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. ■

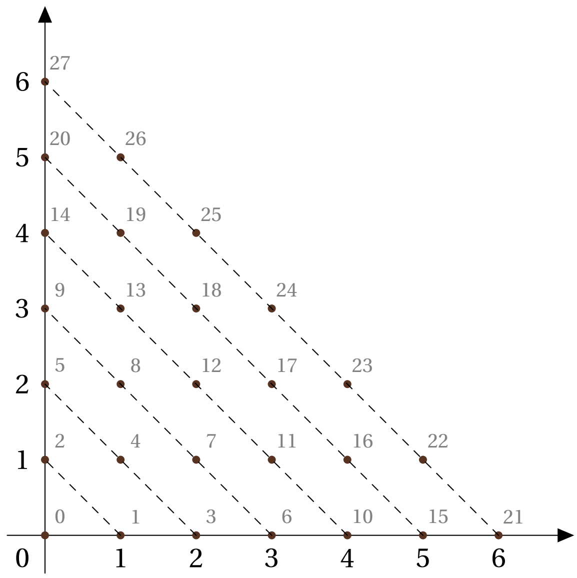


Illustration d'un exemple de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$

Démonstration (bis)

D'après le théorème de factorisation des nombres premiers, tout entier n s'écrit de manière unique sous la forme $2^i p_1 \ldots p_r$ où $p_1, \ldots, p_r$ sont des facteurs premiers impairs. Ainsi, il existe un unique couple (i, j) tel que $n = 2^i \cdot (2j+1) = f(i, j)$. L'application f ainsi définie est par construction bijective. ■

On a en fait le résultat plus général suivant.

Proposition 7.26 : Produit d'ensembles dénombrables

Si E et F sont des ensembles dénombrables, il en va de même pour $E \times F$.

Démonstration

Soient E et F deux ensembles dénombrables. Notons φ_1 une bijection de E dans $\mathbb{N}$ et φ_2 une bijection de F dans $\mathbb{N}$. Considérons maintenant l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{rcl} E \times F & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ (x, y) & \longmapsto & (\varphi_1(x), \varphi_2(y)) \end{array} \right.$$

Cette dernière application φ réalise une bijection de $E \times F$ dans $\mathbb{N}^2$. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, il en va de même pour $E \times F$. ■

On admet que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels[1] est également dénombrable.

Proposition 7.27

Les ensembles $\mathbb{R}$, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ne sont en revanche pas dénombrables.

L'énoncé et la démonstration de ce dernier résultat est hors programme mais il est important d'avoir en tête des exemples d'ensembles non dénombrables qui limiteront de fait la théorie des probabilités exposée cette année.

Il s'agira simplement pour nous de comprendre la différence fondamentale entre les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Bien que tous les deux infinis, l'ordre de grandeur de ces deux infinis n'est pas le même. Ne cherchons donc pas à numéroter les nombres réels, ce n'est pas possible !

B – Espaces probabilisés ($\star$)

1 – Expérience aléatoire, univers

Définition 7.28

On appelle expérience aléatoire une expérience dont toutes les issues possibles sont connues a priori mais dont le résultat peut varier lorsqu'on la répète.

Exemples

Le lancer d'un dé, le tirage d'une boule dans une urne, *etc.*

Définition 7.29

On appelle univers l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire donnée. On le note en général Ω. Les éléments de l'univers Ω sont appelés des possibles (résultats possibles). On dit qu'un possible est réalisé s'il est observé au cours d'une expérience donnée.

Exemples

Le résultat d'une expérience aléatoire peut prendre des formes variées :

- lancer d'un dé : on peut s'intéresser au chiffre obtenu ($\Omega = [\![1, 6]\!]$), à sa parité ($\Omega = \{P, I\}$), *etc.*
- lancer de deux dés discernables : $\Omega = \{(i, j)\ i \in [\![1, 6]\!], j \in [\![1, 6]\!]\} = [\![1, 6]\!]^2$.
  Cela revient à lancer le même dé deux fois de suite.
- tirage de trois cartes dans un jeu de 32 : Ω ? card(Ω) ?

Dans les exemples précédents, l'univers Ω était un ensemble fini mais une expérience peut conduire à un univers infini :

- lancer d'une pièce jusqu'à obtenir pile : $\Omega = \{P, FP, FFP, FFFP, \ldots\} \cup \{\omega_\infty\}$ (dénombrable) ;
- lancer infini d'une pièce : $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ (non dénombrable) ;
- durée de vie d'une ampoule : $\Omega = \mathbb{R}_+^*$ (non dénombrable) ;
- jeu de fléchettes : $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$ (non dénombrable).

1. qui diffère finalement peu de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$…

Il peut être très difficile de définir le résultat d'une expérience. Elle peut être de type très divers : mutation de gènes d'une population de drosophiles, files d'attente, *etc.* Dans ces cas-là, on n'explicitera pas Ω.

2 – Tribus et événements

En première année, on ne s'est intéressé qu'aux expériences aléatoires associées à des univers finis. On pouvait ainsi poser $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ et appeler événement toute partie de Ω ; $\mathscr{P}(\Omega)$ représentant dès lors l'ensemble des événements associés à l'expérience. Rappelons de plus que pour $\omega \in \Omega$, $\{\omega\} \subset \Omega$ était qualifié d'événement élémentaire. On pouvait ainsi décrire tout événement comme réunion (finie) d'événements élémentaires.

Exemple

On lance un dé et on obtient 5. $\Omega = [\![1, 6]\!]$.

- L'événement « face impaire » décrit par $A = \{1, 3, 5\}$ est donc réalisé.
- L'événement « score supérieur ou égal à 3 » décrit par $A = \{3, 4, 5, 6\}$ est réalisé.

Rappelons également la traduction des opérations élémentaires sur les ensembles en termes probabilistes.

Langage probabiliste	Langage ensembliste
Résultat possible	$\omega \in \Omega$
Événement	$A \subset \Omega$
Événement certain	Ω
Événement impossible	$\varnothing$
Événement contraire	$\overline{A}$
Événement « A ou B »	$A \cup B$
Événement « A et B »	$A \cap B$
Événements incompatibles	$A \cap B = \varnothing$

Vocabulaire associé aux événements

Lorsque l'univers Ω est supposé dénombrable, on peut d'après le paragraphe précédent l'écrire sous la forme $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et donc décrire toute partie de Ω comme réunion (dénombrable) d'événements élémentaires. Mais ceci requiert quelques définitions supplémentaires.

Définition 7.30 : Réunion et intersection dénombrables

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble Ω. On définit les ensembles $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ par :

$$\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad \omega \in A_n \quad \text{et} \quad \omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad \omega \in A_n$$

Exemple

Reprenons l'expérience qui consiste à lancer une pièce jusqu'à obtenir pile. L'univers s'écrit alors :

$$\Omega = \left[\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{\underbrace{F \dots F}_{n \text{ fois}} P\}\right] \cup \{\omega_\infty\}$$

L'événement « l'expérience se termine après le $p-$ième lancer » s'écrit $\left[\bigcup_{n=p}^{+\infty} \{\underbrace{F \dots F}_{n \text{ fois}} P\}\right] \cup \{\omega_\infty\}$

Proposition 7.31 : Opérations sur les événements

Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble Ω et $B\subset\Omega$. Alors,

(i) $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$ (ii) $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$

(iii) $B\cap\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(B\cap A_n)$ (iv) $B\cup\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(B\cup A_n)$

Démonstration

Démontrons par exemple le résultat (ii).

$$\omega\in\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}\iff\omega\notin\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\iff\exists n\in\mathbb{N}\quad\omega\notin A_n\iff\exists n\in\mathbb{N}\quad\omega\in\overline{A_n}\iff\omega\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$$

Cependant, lorsque l'univers Ω est supposé non dénombrable, un fait nouveau et déroutant se produit : toutes les parties de Ω ne peuvent être considérées comme des événements [2]. Ne perdons cependant pas espoir et imaginons un sous-ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ qui regrouperait l'ensemble des événements associés à notre expérience aléatoire. Quelques considérations s'imposent :

- Si A est un événement, on s'attend à ce que $\overline{A}$ soit encore un événement.
- De même, si nous disposons d'une suite A_n d'événements, on souhaiterait que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ soit encore un événement, donc un élément de $\mathscr{A}$.
- Cette propriété devrait également s'étendre au cas des intersections dénombrables.

Ce qui nous conduit tout droit à la définition suivante :

Définition 7.32 : Tribu

Soit Ω un ensemble non vide. On appelle tribu sur Ω toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ qui vérifie :

(i) $\Omega\in\mathscr{A}$;

(ii) Si $A\in\mathscr{A}$ alors $\overline{A}\in\mathscr{A}$ *(stabilité par passage au complémentaire)*;

(iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\in\mathscr{A}$ *(stabilité par réunion dénombrable)*.

La donnée d'un univers Ω et d'une tribu $\mathscr{A}$ définit un espace probabilisable $(\Omega,\mathscr{A})$; tout élément de $\mathscr{A}$ est appelé événement de Ω.

L'association des propriétés (ii) et (iii) et la proposition précédente montre qu'une tribu est stable par intersection dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ alors $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\in\mathscr{A}$.

Exercice 7

Montrer que si on munit Ω d'une tribu et que l'on considère deux événements A et B tels que $A\subset B$, alors $B\setminus A$ est encore un événement.

Exemples

Si Ω est un ensemble non vide, voici deux exemples de tribus assez naturelles :

- $\mathscr{A}=\{\varnothing,\Omega\}$ *(tribu grossière)*;
- $\mathscr{A}=\mathscr{P}(\Omega)$ *(tribu exhaustive)*.

2. pour des raisons très techniques que nous ne développerons pas ici.

En pratique,

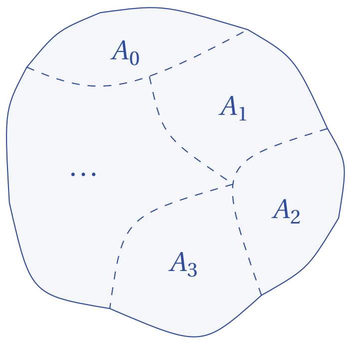
- si Ω est au plus dénombrable, on choisira naturellement $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. La notion de tribu n'est alors plus très pertinente ;
- si Ω est non dénombrable, l'énoncé fournira le cadre adapté en admettant bien souvent l'existence d'une tribu convenable autre que $\mathscr{P}(\Omega)$. Si l'énoncé s'en soucie…

Définition 7.33 : Système complet d'événements

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle système complet d'événements toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements, avec $I = [\![1, n]\!]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ ou $I = \mathbb{N}$, telle que :

(i) Pour tout couple (i, j) d'éléments distincts, $A_i \cap A_j = \varnothing$;

(ii) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.



Représentation d'un système complet d'événements

Exemples

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

- Si A est un événement, $\left(A, \overline{A}\right)$ forme un système complet d'événements de Ω ;
- Si l'univers $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est fini, $(\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_n\})$ forme également un système complet d'événements.
- Plus généralement, pour tout univers au plus dénombrable $\Omega = \{\omega_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, la famille $(\{\omega_i\})_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

3 – Probabilité

En première année, c'est-à-dire dans le cas d'un univers fini, on a défini une probabilité comme une application $\mathbf{P}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ à valeurs dans $[0, 1]$ vérifiant : $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ pour A et B incompatibles. Nous allons dans le cas d'un univers quelconque imposer une contrainte d'additivité plus forte car nous serons amenés à manipuler des familles dénombrables d'événements.

Définition 7.34

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $\mathbf{P} : \mathscr{A} \to [0, 1]$ vérifiant :

(i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

(ii) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) \qquad \text{(propriété de } \sigma\text{-additivité)}$$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ est alors appelé espace probabilisé.

La définition précédente appelle plusieurs remarques :

- La somme qui apparaît dans la propriété (ii) est celle d'une série convergente. C'est ce que suppose implicitement l'axiome de σ-additivité. La convergence étant alors absolue (la série est à termes positifs), l'ordre de sommation importe peu ; ceci justifie l'écriture employée.
- Si on considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles telle que $A_n = \varnothing$ pour $n > p$, la propriété (ii) se traduit par :

$$\mathbf{P}\left(A_1 \cup \ldots \cup A_p\right) = \mathbf{P}(A_1) + \ldots + \mathbf{P}(A_p)$$

En particulier, pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

On retrouve alors la plupart des propriétés étudiées en première année.

Proposition 7.35

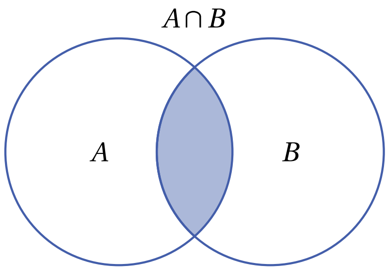
Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathscr{A}$.

- $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.
- $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.
- Si $A \subset B$ alors $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$. *(croissance de la probabilité)*
- $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Démonstration

Démontrons par exemple la dernière propriété.
Comme $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$, d'après la dernière remarque :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cup B) &= \mathbf{P}(A \setminus B) + \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(B \setminus A) \\ &= [\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)] + \mathbf{P}(A \cap B) + [\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)] \\ &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)\end{aligned}$$



Proposition 7.36

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathscr{A}$.

- Pour tout système complet fini d'événements $(A_1, \ldots, A_n)$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k) = 1$.
- Pour tout système complet dénombrable d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) = 1$.

C – Cas d'un univers fini, probabilité uniforme

Dans un univers fini, tout événement A peut s'écrire comme union disjointe d'événements élémentaires.

Exemple

$\Omega = [\![1, 6]\!]$, $A = \{1, 2, 3\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$.

D'après le principe d'additivité, si l'on connaît la valeur que prend $\mathbf{P}$ sur tous les événements élémentaires, on connaît $\mathbf{P}$ partout.

Exemple

On dispose d'un dé pipé dont on connaît la table de probabilités.

Face obtenue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Quelle la probabilité qu'on obtienne un chiffre supérieur à 4 lors d'un tirage ? un chiffre pair ? un chiffre impair ?

Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini et $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, 1]$. On note $p_i = \mathbf{P}(\{\omega_i\})$. Quelles sont les conditions sur les réels p_i pour que $\mathbf{P}$ définisse une probabilité ?

Théorème 7.37

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$.
Il existe une probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad p_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Quand elle existe, $\mathbf{P}$ est unique et pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbf{P}(A) = \displaystyle\sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A}} p_i$

Choisir les réels p_i revient à choisir un modèle probabiliste.

Définition 7.38 : Probabilité uniforme

Soit Ω un ensemble fini. On appelle probabilité uniforme sur Ω l'unique probabilité qui prend la même valeur pour chaque événement élémentaire.

Si une telle probabilité existe, $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ donc en posant $n = \text{card}(\Omega)$,

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \mathbf{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$$

Réciproquement, on prouve l'existence d'une telle probabilité à l'aide du théorème précédent.
Si A est un événement,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas où A se réalise}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

On retrouve souvent la probabilité uniforme dans les exercices où l'on considère des dés non pipés (honnêtes, équilibrés), des pièces non truquées et des tirages « au hasard », de manière équiprobable.

Exercice 8

Pour un dé non pipé, quelle est la probabilité d'obtenir un résultat supérieur à 4 ? un nombre premier ?

Exercice 9

On considère maintenant une urne contenant 3 boules noires, 4 blanches et 5 rouges.

(a) On tire une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité qu'elle soit noire ? blanche ? rouge ?

(b) On tire simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité qu'elles soient toutes de la même couleur ? de couleurs différentes ?

(c) Reprendre les questions précédentes pour un tirage successif de trois boules avec remise.

(d) Refaire de même pour un tirage successif de trois boules sans remise.

D – Cas d'un univers dénombrable ($\star$)

On admet la généralisation du théorème précédent dans le cas d'un univers dénombrable.

Théorème 7.39

Soit $\Omega = \{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un univers dénombrable et une famille $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels.
Alors il existe une probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\{\omega_n\}) = p_n$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n \geqslant 0; \quad \text{la série} \sum p_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} p_i = 1$$

Quand elle existe, $\mathbf{P}$ est unique et pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbf{P}(A) = \displaystyle\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \omega_n \in A}} p_n$.

Ainsi, pour définir une probabilité sur un espace dénombrable, il suffit de se limiter aux événements élémentaires. Attention, ce résultat n'apparaît pas explicitement au programme mais il sera utilisé dans le chapitre « Variables aléatoires ».

Exemple

Considérons $\mathbb{N}$ muni de sa tribu naturelle $\mathscr{P}(N)$. On peut définir une probabilité sur $\mathbb{N}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbf{P}(\{n\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = p_n$$

En effet, la série à termes positifs $\sum p_n$ est géométrique, de raison $\frac{1}{2}$ et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Voici de nouvelles propriétés propres aux univers dénombrables, puisque l'on considère des suites d'événements.

Proposition 7.40 : Continuité croissante

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements (au sens de l'inclusion) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

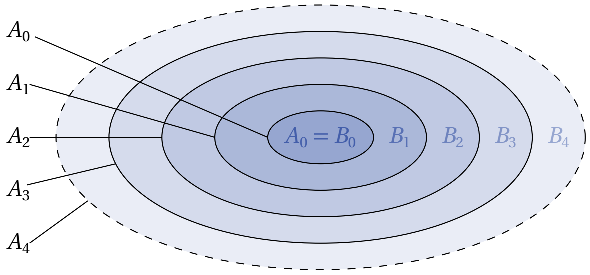
Démonstration

- Tout d'abord, par croissance de la probabilité,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \subset A_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbf{P}(A_n) \leqslant \mathbf{P}(A_{n+1})$$

  La suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $p_n = \mathbf{P}(A_n)$ étant croissante et majorée (par 1), elle converge. Ainsi, la limite figurant dans l'énoncé a bien un sens.

- La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, $\bigcup_{k=0}^{n} A_k = A_n$ donc $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbf{P}(A_n)$. On ne peut cependant pas passer à la limite aussi facilement. On va devoir pour cela utiliser l'axiome de σ-additivité.



Les événements B_n sont deux à deux incompatibles

Les événements A_n n'étant pas deux à deux incompatibles, on va écrire :

$$A_{n+1} = A_n \sqcup (A_{n+1} \setminus A_n)$$

et donc poser :

$$B_0 = A_0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1 \quad B_n = A_n \setminus A_{n-1}$$

- Montrons maintenant que les événements B_n sont deux à deux incompatibles et que leur réunion ne diffère pas de celle des A_n.

  (a) Commençons par prouver que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

  Si $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$ alors il existe p tel que $\omega \in A_p \setminus A_{p-1}$ ou bien $\omega \in A_0$. Dans les deux cas, $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

  Maintenant, supposons que $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Si $\omega \in A_0$, on pose $p = 0$; sinon, on note p le plus petit entier non nul tel que $x \in A_p$ et $x \notin A_{p-1}$. On a alors $\omega \in B_p$, ce qui montre que $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

  (b) Prouvons maintenant que pour $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \varnothing$.

Supposons sans perte de généralité que $i<j$ et posons $\omega \in B_i \cap B_j$. On a $\omega \in B_i$ donc $\omega \in A_i$. On montre de même que $\omega \in A_j$. De plus, $A_i \subset A_{j-1} \subset A_j$ par croissance des événements A_n donc $\omega \in A_{j-1}$. Absurde puisque $\omega \in B_j$. Ainsi, $B_i \cap B_j = \varnothing$.

- En passant à la limite, par σ-additivité, il vient alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{P}(A_k) - \mathbf{P}(A_{k-1})) + \mathbf{P}(A_0)\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty} [\mathbf{P}(A_n) - \mathbf{P}(A_0) + \mathbf{P}(A_0)] = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

■

Proposition 7.41 : Continuité décroissante

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements (au sens de l'inclusion) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

Démonstration

On applique la proposition précédente à la suite croissante d'événements $\left(\overline{A_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Proposition 7.42 : Sous-additivité finie

Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est une famille d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(A_k)$$

Démonstration

Montrons par récurrence sur n que : $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(A_k)$

(a) La formule est évidente pour $n=0$. Elle est également vraie pour $n=1$:

$$\mathbf{P}(A_0 \cup A_1) = \mathbf{P}(A_0) + \mathbf{P}(A_1) - \mathbf{P}(A_0 \cap A_1) \leqslant \mathbf{P}(A_0) + \mathbf{P}(A_1)$$

(b) Supposons la propriété vraie au rang n et montrons qu'elle l'est encore au rang $n+1$.
Comme $\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k = \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}$, on peut écrire :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) + \mathbf{P}(A_{n+1}) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(A_k) + \mathbf{P}(A_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \mathbf{P}(A_k)$$

■

Proposition 7.43 : Sous-additivité dénombrable

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et si la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

Démonstration

L'idée est de passer à la limite dans l'inégalité précédente en posant pour cela $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$.
La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements. En vertu de la propriété de continuité croissante, et en utilisant le fait que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, on a :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$$

On peut donc passer à la limite dans l'inégalité obtenue précédemment et on a : $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$ ■

Définition 7.44

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et A un événement.

(i) Si $A \neq \varnothing$ et $\mathbf{P}(A) = 0$, on dit que l'événement A est négligeable ou quasi-impossible.

(ii) Si $A \neq \Omega$ et $\mathbf{P}(A) = 1$, on dit que l'événement A est presque sûr ou quasi-certain.

Exemple

Reprenons notre pièce de monnaie et l'expérience qui consiste à lancer la pièce équilibrée jusqu'à obtenir pile. Cherchons à construire une probabilité intéressante sur l'univers :

$$\Omega = \left[\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{\underbrace{F\cdots F}_{n \text{ fois}} P\}\right] \cup \{\omega_\infty\}$$

associé à la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$. Lorsqu'on lance la pièce n fois, on a 1 chance sur 2^{n+1} d'obtenir $\underbrace{F\cdots F}_{n \text{ fois}} P$.

Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\{\underbrace{F\cdots F}_{n \text{ fois}} P\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$, on doit nécessairement poser $\mathbf{P}(\{\omega_\infty\}) = 0$. L'événement $\{\omega_\infty\}$, c'est-à-dire l'obtention d'une infinité de Pile, bien que non impossible, est de probabilité nulle ; ce qui semble plutôt conforme à l'intuition !

La propriété de sous-additivité dénombrable permet notamment de montrer que la réunion dénombrable d'événements négligeables reste négligeable.

E – Conditionnement

1 – Probabilité conditionnelle

Lorsque l'on dispose d'informations sur le résultat d'une expérience donnée, il est possible d'affiner nos prédictions. Considérons par exemple le lancer d'un dé non pipé. On associe à cette expérience l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]$ et on note A l'événement « le résultat est impair », B l'événement « le résultat est 3 ».

- Quelle est la probabilité d'obtenir 3 ? On trouve évidemment $\mathbf{P}(B) = 1/6$.
- Maintenant, supposons que le résultat est impair, quelle est la probabilité d'avoir obtenu 3 ? Tout se passe comme si l'on avait déformé notre univers des possibles en se restreignant à $\Omega' = A = \{1, 3, 5\}$. On trouve alors une probabilité de $1/3$.

$\mathbf{P}(A) = 1/2$ et $\mathbf{P}(B) = 1/6$. La probabilité que B soit réalisé sachant que A l'est vaut :

$$\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\text{nombre de cas favorables pour } A\cap B}{\text{nombre de cas favorables pour } A} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

On dit que l'événement A a conditionné l'univers Ω.

Théorème / Définition 7.45 : Probabilité conditionnelle

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et un A événement tel que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. L'application

$$\mathbf{P}_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ B & \longmapsto & \dfrac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)} \end{array} \right.$$

est une probabilité sur Ω. On l'appelle probabilité conditionnelle relative à A (ou sachant A).
Pour tout événement B, $\mathbf{P}_A(B)$ – notée encore $\mathbf{P}(B|A)$ – est appelée probabilité de B sachant A.

Démonstration

Montrons que $\mathbf{P}_A$ définit bien une probabilité sur Ω.

- $\mathbf{P}_A(\Omega) = \dfrac{\mathbf{P}(A\cap\Omega)}{\mathbf{P}(A)} = 1$.
- Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles.

$$\mathbf{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \frac{\mathbf{P}\left(A\bigcap\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right)\right)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(A\cap B_n)\right)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(A\cap B_n)}{\mathbf{P}(A)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathbf{P}(A\cap B_n)}{\mathbf{P}(A)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}_A(B_n)$$

car les événements $(A\cap B_n)$ sont deux à deux incompatibles.

■

Il est important de bien faire la distinction entre $\mathbf{P}_A(B)$ et $\mathbf{P}(A\cap B)$.

Exercice 10

Mes voisins ont deux enfants. Quelle est la probabilité qu'ils aient au moins un garçon ? Quelle est la probabilité qu'ils aient au moins un garçon sachant qu'ils me présentent un de leurs enfants et qu'il s'agit d'une fille ?

Revenons maintenant à quelques résultats déjà abordés en première année. Nous n'en donnons une démonstration que lorsque celle-ci diffère de par l'éventuel caractère infini de l'univers considéré.

2 – Formule des probabilités composées

Lemme 7.46

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Alors, si $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A\cap B) &= \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B|A)\\ &= \mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(A|B)\end{aligned}$$

On notera que, généralement, $\mathbf{P}(A\cap B) \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Théorème 7.47 : Formule des probabilités composées

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ une famille d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telle que $\mathbf{P}(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1\cap\ldots\cap A_n) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\ldots\mathbf{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)\\ &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\ldots\mathbf{P}(A_n|A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})\end{aligned}$$

Cette formule est très pratique lorsque que l'expérience se déroule en plusieurs étapes successives, dans un ordre chronologique.

Exemple

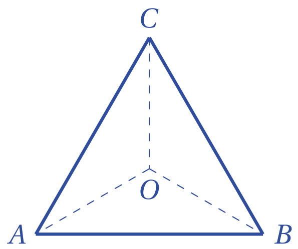
Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard successivement et sans remise quatre boules dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches puis deux noires ?
On munit pour cela $\Omega = \{b_1, b_2, b_3, b_4, n_1, n_2, n_3\}$ de la probabilité uniforme.
On note B_i l'événement « obtenir une boule blanche au i^e tirage », N_i l'événement « obtenir une boule noire au i^e tirage ».
On recherche la valeur de $\mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4)$. On utilise pour cela la formule des probabilités composées.

$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{4}{7}; \quad \mathbf{P}(B_2|B_1) = \frac{1}{2}; \quad \mathbf{P}(N_3|B_2 \cap B_1) = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(N_4|N_3 \cap B_2 \cap B_1) = \frac{1}{2}$$

On trouve ainsi $\mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{35}$.

Exercice 11

Une puce se déplace par sauts successifs sur les sommets et le centre de gravité d'un triangle équilatéral. Au temps $t = 0$, elle est en O. À chaque instant, elle saute du point où elle se trouve en l'un des autres points de façon équiprobable.



(i) Calculer la probabilité qu'elle revienne en O pour la première fois au temps $t = n$.
(ii) Calculer la probabilité de l'événement « la puce revient en O ». Commenter.

3 – Formule des probabilités totales

La formule des probabilités totales permet de calculer la probabilité d'un événement en fonction des probabilités conditionnelles liées à cet événement.

Théorème 7.48 : Formule des probabilités totales

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements.
Pour tout événement B, la série de terme général $\mathbf{P}(B \cap A_n)$ est convergente et :

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B|A_n)\mathbf{P}(A_n)$$

Avant de démontrer ce résultat, deux remarques s'imposent :

(i) Pour que cette formule ait toujours un sens, on conviendra que $\mathbf{P}(B|A_n)\mathbf{P}(A_n) = 0$ lorsque $\mathbf{P}(A_n) = 0$.
(ii) La formule est encore valable lorsque la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne constitue pas un système complet d'événements mais vérifie seulement $\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$; on parle alors de système quasi-complet d'événements.

Démonstration

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événement, quel que soit l'événement B,

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} (B \cap A_n)$$

Donc par σ-additivité, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} (B \cap A_n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B|A_n)\mathbf{P}(A_n)$. ■

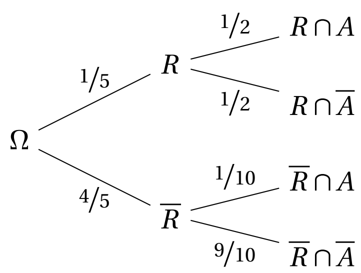
Cas particulier : si A est un événement, alors $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements. Pour peu que $\mathbf{P}(A) \in]0;1[$, on aura : $\forall B \in \mathscr{A}\ \ \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B|\overline{A})\mathbf{P}(\overline{A})$.

Exemple

Une compagnie d'assurance distingue deux types d'assurés : les conducteurs à risque représentent 20% des assurés et les conducteurs prudents 80%. Les premiers ont une probabilité de 0.5 d'avoir un accident par an alors que les seconds seulement 0.1.
Quelle est la probabilité qu'un nouvel assuré provoque un accident dans l'année qui suit la signature du contrat? dans les deux ans suivant la signature du contrat?

Notons R l'événement « le conducteur est à risque » et A l'événement « le conducteur provoque un accident dans l'année ». La première probabilité que l'on nous demande de calculer est $\mathbf{P}(A)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(A|R)\mathbf{P}(R) + \mathbf{P}(A|\overline{R})\mathbf{P}(\overline{R})\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\cdot\frac{4}{5} = \frac{9}{50}\end{aligned}$$



Rappelons qu'il est important d'accompagner son raisonnement de tout schéma explicatif mais que celui-ci ne peut constituer une preuve.
Pour la deuxième question, mieux vaut calculer la probabilité pour un nouvel assurant de ne pas provoquer d'accident dans les deux premières années, à savoir $\left(\frac{9}{50}\right)^2$. On trouve ainsi $1-\left(\frac{9}{50}\right)^2 = \frac{2419}{2500} \approx$ 97%.

Exercice 12

Des boules en nombre infini numérotées $1, 2, \ldots$ sont placées successivement, indépendamment les unes des autres, dans trois boîtes.

(i) Pour $k \geqslant 2$, on note A_k l'événement « deux des trois boîtes sont non vides pour la première fois lorsqu'on place la k–ième boule ». Calculer $\mathbf{P}(A_k)$ puis $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\mathbf{P}(A_k)$. Interpréter.

(ii) Pour $i \geqslant 3$, on note B_i l'événement « les trois boîtes sont non vides pour la première fois lorsqu'on place la i–ème boule ». Calculer $\mathbf{P}(B_i|A_k)$ pour $k \geqslant 2$ et $i \geqslant 3$. En déduire $\mathbf{P}(B_i)$ puis $\displaystyle\sum_{i=3}^{+\infty}\mathbf{P}(B_i)$. Interpréter.

4 – Formule de Bayes

Proposition 7.49

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (A, B) un couple d'événements vérifiant $\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B) \neq 0$. Alors,

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}\mathbf{P}(B|A) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}\mathbf{P}_A(B)$$

Théorème 7.50 : Formule de Bayes

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements et B un événement, événements de probabilités toutes non nulles. Alors,

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbf{P}(A_k|B) = \frac{\mathbf{P}(B|A_k)\mathbf{P}(A_k)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(B|A_n)\mathbf{P}(A_n)}$$

On dit souvent de la formule de Bayes qu'elle permet de « remonter le temps », de « remonter aux causes ».

Cas particulier : si $0<\mathbf{P}(A)<1$ alors $\mathbf{P}(A|B)=\dfrac{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B|\overline{A})\mathbf{P}(\overline{A})}$.

Exemple

Un magasin vend des téléviseurs provenant de deux entreprises (40% pour l'entreprise A et 60% pour l'entreprise B). 5% des appareils provenant de l'entreprise A présentent un défaut, 3% pour l'entreprise B. J'achète un appareil défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne de l'entreprise A ?
On note F_A (resp. F_B) l'événement « l'appareil a été fabriqué par l'entreprise A » (resp. par l'entreprise B). On note D l'événement « il est défectueux ».

$$\mathbf{P}(F_A|D)=\frac{\mathbf{P}(F_A)\mathbf{P}(D|F_A)}{\mathbf{P}(D)}=\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{100}\cdot\frac{1}{\mathbf{P}(D)}$$

où $\mathbf{P}(D)=\mathbf{P}(D|F_A)\mathbf{P}(F_A)+\mathbf{P}(D|F_B)\mathbf{P}(F_B)=\dfrac{19}{500}$. D'où $\mathbf{P}(F_A|D)=\dfrac{10}{19}$.

Exercice 13

Un magasin possède n caisses. Les clients se répartissent de façon indépendante et équiprobable entre les différentes caisses. On suppose que la probabilité qu'il y ait k clients dans le magasin est $p_k=\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
La caisse n°1 a vu passer m clients un jour donné.
Quelle est la probabilité qu'il y ait eu dans le magasin $n\cdot m$ clients ?

F – Indépendance

1 – Indépendance de deux événements

Définition 7.51 : Indépendance de deux événements

Deux événements de l'espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ sont dits indépendants si $\mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)$.

Ainsi, l'indépendance de deux événements est une propriété qui devra *a priori* obligatoirement être vérifiée par le calcul. Sauf dans certains cas, où l'indépendance de deux événements va être supposée d'emblée, et c'est alors tout le modèle probabiliste retenu (univers, tribu, probabilité) qui devra s'adapter à cette hypothèse. Dans tous les cas, on suivra les indications de l'énoncé !

Exercice 14

On lance deux dés et on note A l'événement « la valeur du premier dé est supérieure à 4 » et B l'événement « la valeur du deuxième dé est impaire ». Montrer que les événements A et B sont indépendants.

Proposition 7.52

Si A et B sont deux événements indépendants avec $\mathbf{P}(A)\neq 0$, alors $\mathbf{P}(B|A)=\mathbf{P}(B)$.

Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B le sont également.

2 – Indépendance d'une famille d'événements

Définition 7.53 : Famille d'événements deux à deux indépendants

On dit des événements $A_1,\dots,A_n$ qu'ils sont deux à deux indépendants si :

$$\forall i,j\in[\![1,n]\!],\ i\neq j\Longrightarrow \mathbf{P}(A_i\cap A_j)=\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$$

Définition 7.54 : Famille finie d'événements mutuellement indépendants

On dit des événements $A_1, \ldots, A_n$ qu'ils sont mutuellement indépendants si :

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$$

L'indépendance mutuelle d'une famille d'événements implique qu'ils sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse.

Exercice 15

On dispose de deux urnes contenant chacune une boule noire et une boule blanche. On tire une boule dans chaque urne. On note A l'événement « on tire une boule blanche de l'urne 1 », B l'événement « on tire une boule blanche de l'urne 2 » et C l'événement « les deux boules sont de même couleur ».
Montrer que dans ce cas, $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C)$.

On notera que le programme se limite au cas des familles finies d'événements mutuellement indépendants même si l'on peut généraliser sans peine cette définition au cas des familles dénombrables.