Réduction #1

Travaux dirigés #06

Partie A – Pour démarrer...

Exercice 1 — Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$E_2 = \text{Vect}((1,2)) \text{ et } E_{-3} = \text{Vect}((1,1)), \text{ avec } E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^2})$$

1. Montrer que f est un automorphisme diagonalisable.
2. Préciser la trace, le déterminant de f et son polynômes caractéristique.
3. Calculer $f((2,3))$.
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 2 — Soient E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$(u - 3\text{id}_E) \circ (u + 2\text{id}_E) = 0$$

Montrer que u est diagonalisable.

Partie B – Réduction matricielle

Exercice 3 — Réduire les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \ ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ ; \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 — Diagonaliser sans effort la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 — Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -8 & 9 & 4 \\ -6 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 —

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? $(a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C})$

Exercice 7 — On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/n & 1/n \\ -1/n & 1 + 2/n & 1/n \\ 1/n & -1/n & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer sans calcul que 1 et $1 + 1/n$ sont valeurs propres de A_n.
2. La matrice A_n est-elle diagonalisable ? inversible ?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n la matrice produit $B_n = A_1 A_2 \cdots A_n$.
   La matrice B_n est-elle diagonalisable ? inversible ? Si oui, déterminer B_n^{-1}.

Exercice 8 — *Matrices circulantes*

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

1. Calculer A^3 ; en déduire les valeurs propres possibles de A.
   Préciser alors les éléments propres de A.
2. Diagonaliser M.

Exercice 9 — Soient trois suites u, v et w définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 1$ et $w_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = 3u_n - 3v_n - 2w_n \end{cases}$$

Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 10 — Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2} \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 11 — Déterminer les valeurs propres de la matrice :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable ?

Exercice 12 — Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $B^2 = A$.

1. La proposition « A diagonalisable $\iff$ B diagonalisable » est-elle vraie ?
2. Soit $A=\begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. On cherche $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = A$.
   a) Montrer que A est semblable à une matrice diagonale D.
   b) Déterminer l'ensemble des matrices C telles que $C^2 = D$.
   c) En déduire les matrices B qui conviennent.

Exercice 13 — *Diagonalisation simultanée (première approche)*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes et que $AB = BA$.

1. Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g et en déduire l'existence d'une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres communs à f et g.
2. Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation matricielle $2M^2 + 5M = 3A$.

Exercice 14 — Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B=\begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\chi_B(X) = \chi_A(X+1) \cdot \chi_A(X-1)$.
2. On suppose A diagonalisable. Montrer que B est diagonalisable.

🚲 **Exercice 15 —** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. a) On suppose ici seulement A inversible. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
   b) Justifier que pour $p \in \mathbb{N}$ suffisamment grand $A + \frac{1}{p} \cdot I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
   En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
   c) Retrouver ce résultat en utilisant une caractérisation du rang.
2. a) On suppose ici A inversible. Montrer que les sous-espaces propres de AB et BA ont deux à deux même dimension puis en déduire que AB est diagonalisable si et seulement si BA est diagonalisable.
   b) Trouver A et B telles que $AB = 0$ et $BA \neq 0$. Qu'en déduire ?

Exercice 16 — On possède deux urnes. Initialement, il y a deux boules blanches dans U_1 et deux noires dans U_2. À chaque tirage, on prend une boule dans U_1 et une boule dans U_2, et on les échange. On appelle X_k le nombre de boules blanches dans U_1 après le k-ième tirage. On pose $X_0 = 2$.

1. Déterminer $X_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. On pose $Y_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_k=0) & \mathbf{P}(X_k=1) & \mathbf{P}(X_k=2) \end{pmatrix}^\top$.
   Trouver une matrice A telle que $Y_{k+1} = AY_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   En déduire l'espérance de X_k.
3. Trouver une base de vecteurs propres de A. Décomposer Y_0 dans cette base.
4. Montrer que $Y_k = A^k Y_0$. En déduire la loi de X_k.

Partie C – Réduction d'endomorphismes

Exercice 17 — Soit $E = \mathbb{R}[X]$.
Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = (X+1)(X-3)P' - XP$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
   INDICATION : *On pourra déterminer le degré de tels vecteurs propres.*

Exercice 18 — On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ par :

$$\varphi(P) = nXP - (X^2-1)P'$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que la famille $(1, X-1, \ldots, (X-1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer la matrice de φ dans cette base.
3. L'application φ est-elle diagonalisable ?

Exercice 19 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = X(1-X)P' + nXP$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f
   INDICATION : *On pourra résoudre une équation différentielle.*
3. f est-elle diagonalisable ?

Exercice 20 — À tout polynôme P à coefficients réels on associe le polynôme :

$$\varphi(P) = (X-1)(X-2)P' - 2XP$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que si P est un vecteur propre de φ, alors $\deg(P) = 2$.
3. Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 21 — On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $E = \{aI_3 + bA + cA^2 ; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que $A^3 \in E$.
   Montrer que $\mathscr{B} = (I_3, A, A^2)$ est une base de E.
2. Quelle équation vérifient les valeurs propres de A ?
3. Déterminer, sans calculer ses valeurs propres, si A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Même question dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.
4. On définit l'application Φ_A en posant pour tout $M \in E$: $\Phi_A(M) = AM$.
   Montrer que Φ_A est un endomorphisme de E et en donner la matrice dans $\mathscr{B}$. L'application Φ_A est-elle diagonalisable ?

🚲 **Exercice 22 —** Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie $n \geqslant 1$ et $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$.

1. a) En considérant la restriction de u à $\mathrm{Im}(v)$, montrer que :

   $$\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(u \circ v) + \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(v))$$

   b) En déduire que $\dim \mathrm{Ker}(u \circ v) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(u) + \dim \mathrm{Ker}(v)$.

   c) Soit $(u_1, \dots, u_p) \in \mathscr{L}(E)^p$, où $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

   $$\dim \mathrm{Ker}(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_p) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim \mathrm{Ker}(u_k)$$

2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe des scalaires $(\lambda_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ deux à deux distincts tels que :

   $$(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ (f - \lambda_2 \mathrm{id}_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p \mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

   Montrer que $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{id}_E)$. Que dire de l'endomorphisme f ?

Exercice 23 — Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. Pour toute fonction $f \in E$, on définit la fonction g par :

$$\forall x \in [0,1] \quad g(x) = \int_0^x \inf(x,t) f(t) \, \mathrm{d}t$$

On note enfin T l'application définie sur E par $T : f \mapsto g$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.
   On résoudra pour cela une équation différentielle du second ordre.

$\boxed{\texttt{CCINP}}$ Exercices 59, 63, 67, 69, 70, 72, 73 et 83.