11 Réduction d'endomorphismes (2)

« Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que la mer. »
Victor Hugo (1802–1885)

Plan de cours

♦ **Introduction –** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. u désigne un endomorphisme de E.

Nous avons à de nombreuses reprises croisé le chemin de *polynômes annulateurs* d'un endomorphisme ou d'une matrice. Par exemple,

- à l'occasion de calculs d'inverse ou de puissances. Rappelons que si u vérifie $u^2 = 5u - 6\mathrm{id}_E$, alors :
$$-\frac{1}{6}\cdot u\circ(u-5\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E \text{ donc } u \text{ est bijective et } u^{-1} = \frac{1}{6}\circ(5\mathrm{id}_E - u)$$
Par ailleurs, $u^2 \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u)$. On montre facilement par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u^n \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u)$ et on peut même exprimer explicitement u^n en fonction de id_E et u.
- à l'occasion de recherche de valeurs propres. Rappelons que si u vérifie $u^2 = 5u - 6\mathrm{id}_E$ et que l'on note λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé, il vient :
$$u^2(x) - 5u(x) + 6x = (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x = 0_E \text{ donc, } x \text{ étant non nul, } \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-3)(\lambda-2) = 0$$
On a donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \{2,3\}$. Tous les cas de figure sont possibles : $\mathrm{Sp}(u) = \{2\}$, $\mathrm{Sp}(u) = \{3\}$, ou $\mathrm{Sp}(u) = \{2,3\}$.

Les polynômes d'endomorphismes, en particulier les polynômes annulateurs, vont constituer de précieux outils pour travailler à la réduction des endomorphismes. La logique de fond restera la même que dans le premier chapitre, nous chercherons à identifier des sous-espaces laissés stables par u sur lesquels l'endomorphisme agira le plus simplement possible, en particulier ses sous-espaces propres.

I | Polynômes d'endomorphismes et de matrices

A – Algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$

Définition 11.1 : Polynôme d'endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. À tout polynôme $P = a_pX^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0$, on associe l'endomorphisme $P(u)$ défini par :
$$P(u) = a_pu^p + a_{p-1}u^{p-1} + \cdots + a_1u + a_0\mathrm{id}_E \quad \text{où} \quad u^k = \underbrace{u\circ\cdots\circ u}_{k \text{ fois}}$$
On pose alors $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} = \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Vect}}(u^n)$.

On définit de même, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $P(M) = a_pM^p + a_{p-1}M^{p-1} + \cdots + a_1M + a_0I_n$.

Proposition 11.2 : Structure d'algèbre de $\mathbb{K}[u]$

$(\mathbb{K}[u], +, \circ, \cdot)$ possède une structure d'algèbre commutative. Plus précisément,

- $(\mathbb{K}[u], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\mathbb{K}[u], +, \circ)$ est un anneau commutatif.
- Pour tous $\lambda\in\mathbb{K}$, $f, g \in \mathbb{K}[u]$, on a $(\lambda f)\circ g = f\circ(\lambda g) = \lambda(f\circ g)$.

Pour les 5/2, l'application $P \mapsto P(u)$ définit un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$; son image est $\mathbb{K}[u]$. En « français », cela revient à dire que pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

- $(\lambda P + \mu Q)(u) = \lambda P(u) + \mu Q(u)$.
- $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
- $1(u) = \mathrm{id}_E$.

La propriété multiplicative est essentielle ! On posera par la suite $\mathbb{K}_n[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}_n[X]\} = \underset{0\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Vect}}\,(u^k)$.

$(\mathbb{K}[M], +, \times, \cdot)$ possède de même une structure d'algèbre commutative et $\mathbb{K}[M]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Corollaire 11.3

- Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et E de dimension finie, $\mathbb{K}[u]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ (de dimension finie).
- Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[M]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (donc de dimension finie).

Exercice 1

Expliciter $\mathbb{K}[M]$ dans les quatre cas suivants :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut montrer par récurrence que si $Q \in \mathbb{K}[X]$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $Q(P^{-1}AP) = P^{-1}Q(A)P$. Cela permet de montrer que si M représente l'endomorphisme u dans une certaine base, $P(M)$ représente alors l'endomorphisme $P(u)$.

Exercice 2

Montrer que si deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ le sont.

Proposition 11.4

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Im}(P(u))$ et $\mathrm{Ker}(P(u))$ sont stables par u.

Il s'agit comme toujours d'être vigilant(e) dans la rédaction employée :

- $P(u)(x)$ a un sens : c'est l'endomorphisme $P(u)$ que l'on évalue en x ; $P(u)(x)$ est donc un élément de E.
- $P(u(x))$ n'en a aucun puisqu'on ne peut pas élever le vecteur $u(x)$ à une quelconque puissance !

Exercice 3

Adapter la preuve précédente pour montrer que $\mathrm{Im}(P(u))$ et $\mathrm{Ker}(P(u))$ sont stables par $Q(u)$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$.

B – Polynômes annulateurs et polynôme minimal

Définition 11.5 : Polynôme annulateur

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. P est appelé polynôme annulateur de u si $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exemple

- Le polynôme $X - \lambda$ annule l'homothétie $\lambda \mathrm{id}_E$.
- Le polynôme $X^2 - X$ annule toute projection vectorielle.
- Le polynôme $X^2 - 1$ annule toute symétrie vectorielle.

On définit de même un polynôme annulateur pour une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Avant d'étudier les propriétés des polynômes annulateurs, assurons-nous qu'en dimension finie, il en existe d'autres que le seul polynôme nul.

Lemme 11.6

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Si E est de dimension finie, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Démonstration

Notons n la dimension de E. $\mathscr{L}(E)$ étant de dimension n^2, la famille $(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{n^2})$ qui comporte n^2+1 vecteurs est nécessairement liée. Il existe donc $\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}$ non tous nuls tels que $\lambda_0 \mathrm{id}_E + \cdots + \lambda_{n^2} u^{n^2} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Bref, le polynôme $\lambda_0 + \cdots + \lambda_{n^2} X^{n^2}$ est non nul et annule u. ■

On constate qu'il existe toujours un polynôme annulateur de degré *au plus* égal à n^2. On fera nettement mieux !

Exercice 4

Trouver un polynôme annulateur non nul d'une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On remarquera que si P annule u, alors tout multiple de P annule également u. En effet, si $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors :

$$\forall Q \in \mathbb{K}[X], \quad (PQ)(u) = Q(u) \circ P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

En dimension finie, il existe une infinité de polynômes annulateurs : on a au moins tous les multiples d'un polynôme annulateur donné. Maintenant, si P et Q sont deux polynômes annulateurs de u, que partagent-ils en commun ? Il est facile de voir que le pgcd de P et Q annule lui aussi u. En effet, en posant $D = \mathrm{pgcd}(P, Q)$, le théorème de Bézout « version polynôme » donne :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{K}[X], \quad D = AP + BQ$$

On a donc trivialement $D(u) = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Allons plus loin et montrons que tous les polynômes annulateurs sont multiples d'un seul et même polynôme unitaire, qualifié de *polynôme minimal*.

Théorème / Définition 11.7 : Polynôme minimal

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ non nul, E étant supposé de dimension finie. Il existe alors un unique polynôme unitaire qui divise tous les polynômes annulateurs de u.
Ce polynôme est appelé polynôme minimal de u et est généralement noté π_u.

Un endomorphisme en dimension infinie n'admet pas toujours de polynôme minimal.

Démonstration

- Comme E est de dimension finie, l'ensemble $\{\deg(P) \mid P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul$\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus petit élément que l'on notera d.
- Soit π_u un polynôme annulateur de u de degré d que l'on va supposer de plus unitaire afin de garantir l'unicité. Considérons maintenant un polynôme annulateur P quelconque de u. Une division euclidienne nous permet d'écrire :

$$\exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X], \quad P = Q \times \pi_u + R \quad \text{avec } \deg(R) < d$$

De plus $R(u) = P(u) - Q(u) \circ \pi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Comme R annule u et est de degré strictement inférieur au degré minimal d, $R = \tilde{0}$. Ce qui prouve bien que $P = Q \times \pi_u$.

Le polynôme minimal est donc minimal en degré et tous les polynômes annulateurs sont des multiples de ce polynôme [1]. Bien entendu, ce qui est vrai en dimension finie pour un endomorphisme reste vrai pour une matrice. On définit donc de façon analogue le polynôme minimal d'une matrice.

Exercice 5

Quel est le polynôme minimal d'une projection vectoriel ? d'une symétrie vectorielle ? d'un endomorphisme nilpotent ? Quels sont les endomorphismes dont le polynôme minimal est de degré 1 ?

1. Nous verrons ultérieurement que l'ensemble des polynômes annulateurs d'un endomorphisme u est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$. Cet idéal, non réduit à 0, est alors engendré par un seul élément, c'est le polynôme minimal.

Exercice 6

> Déterminer le polynôme minimal des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Proposition 11.8

Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.

Proposition 11.9

Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.
En particulier, $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u)$.

Démonstration

Procédons par double inclusion en supposant u non nul. Posons $d = \deg(\pi_u)$; on a nécessairement $d \geqslant 1$.

- $\boxed{\subset}$ On a clairement $\mathbb{K}_{d-1}[u] = \underset{0\leqslant k\leqslant d-1}{\mathrm{Vect}}(u^k) \subset \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Vect}}(u^n) = \mathbb{K}[u]$.
- $\boxed{\supset}$ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrons que $P(u) \in \underset{0\leqslant k\leqslant d-1}{\mathrm{Vect}}(u^k)$. Par division euclidienne,

$$\exists (Q,R) \in \mathbb{K}[X], \quad P = Q \times \pi_u + R \quad \text{avec } \deg(R) < d$$

  On a donc $P(u) = R(u) \in \mathbb{K}_{d-1}[u]$. Ainsi, $\mathbb{K}[u] \subset \underset{0\leqslant k\leqslant d-1}{\mathrm{Vect}}(u^k)$.

La dimension de $\mathbb{K}[u]$ en découle. ■

Voici une nouvelle propriété du polynôme minimal qui s'avérera fort utile dans la suite du chapitre.

Proposition 11.10

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace stable par u non réduit à $\{0_E\}$.
Alors, le polynôme minimal de l'endomorphisme induit $u_{|F}$ divise celui de u.

Démonstration

Commençons par remarquer que les polynômes annulateurs de u annulent $u_{|F}$. En effet, si P annule u,

$$\forall x \in F, \quad P(u_{|F})(x) = P(u)(x) = 0_E$$

Le polynôme minimal de $u_{|F}$ divisant tous les polynômes annulateurs de $u_{|F}$, il divise tous ceux de u et en particulier π_u. ■

C – Polynômes annulateurs et valeurs propres

Théorème 11.11

Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P. Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Démonstration

Soient $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un polynôme annulateur de u, λ une valeur propre de u associée au vecteur propre x.

$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \lambda^k\right) x = P(\lambda)x = 0_E$$

Comme $x \neq 0_E$, $P(\lambda) = 0$. ■

Bien entendu, dans la preuve ci-dessus, les sommes sont toutes finies puisque (a_k) est une suite de coefficients presque tous nuls.

Attention, comme indiqué à maintes reprises, l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur contient les valeurs propres mais n'est pas égal, en général, au spectre de u.

Exemple

Le polynôme $X(X-1)(X-2)$ annule I_n mais seule 1 est valeur propre.

Exercice 7

Trouver les valeurs propres de la matrice de taille $n \times n$ qui ne contient que des 1.

D – Théorème de Cayley-Hamilton

Il est un polynôme que l'on a laissé de côté depuis bien longtemps et dont les racines sont exactement les valeurs propres de l'endomorphisme u : son polynôme caractéristique. Mettons fin au suspens, le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur ! C'est l'objet du fameux théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème 11.12 : Théorème de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie (ou d'une matrice) est un polynôme annulateur. Autrement dit, si E est de dimension finie,

$$\forall u \in \mathscr{L}(E), \quad \chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

Voici une démonstration instructive du théorème (celle-ci n'est pas exigible aux concours).

Démonstration

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, E étant supposé de dimension finie. Montrer que $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ revient à montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \chi_u(u)(x) = 0_E$$

La propriété étant immédiate pour $x = 0_E$, nous allons considérer par la suite un vecteur x fixé non nul.

- E étant de dimension finie, il existe un plus grand entier p tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre. Notons F le sous-espace vectoriel engendré. Par maximalité de p, il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que :
$$u^p(x) = \lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x)$$
- F est stable par u. En effet, si y est combinaison linéaire de $x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)$ alors $u(y)$ est combinaison linéaire de $u(x), \dots, u^p(x)$ donc de $x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)$.
- On peut donc considérer la matrice de l'endomorphisme induit $u_{|F}$ dans la base $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$:
$$M = \mathrm{Mat}(u_{|F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \lambda_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_{p-1} \end{pmatrix}$$

$$\chi_{u_{|F}} = \chi_M = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & -\lambda_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X-\lambda_{p-1} \end{vmatrix} = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k X^k \text{ (à l'aide de l'opération } L_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{p-1} X^{k-1} L_k).$$

Comme $u^p(x) = \lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x)$, on vient de montrer que $\chi_{u_{|F}}(u)(x) = 0_E$.

- Comme $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\chi_u = P \times \chi_{u_{|F}}$. $\chi_u(u) = P(u) \circ \chi_{u_{|F}}(u)$ donc :

$$\chi_u(u)(x) = P(u)\big(\chi_{u_{|F}}(u)(x)\big) = P(u)(0_E) = 0_E$$

C'est bien ce que nous cherchions à démontrer. ■

Le polynôme minimal d'un endomorphisme divise donc le polynôme caractéristique. D'où le corollaire suivant.

Corollaire 11.13

Le degré du polynôme minimal est inférieur ou égal à $\dim(E)$.

Dans un espace de dimension n, $\dim(\pi_u) \leqslant n$.

On peut déduire directement du théorème de Cayley-Hamilton un nouveau résultat (même si l'on peut démontrer ce dernier par des moyens plus élémentaires).

Théorème 11.14

Les racines du polynôme minimal d'un endomorphisme sont, comme pour le polynôme caractéristique, exactement ses valeurs propres.

Démonstration

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les r valeurs propres distinctes de $u \in \mathscr{L}(E)$. Elles sont déjà racines de π_u en tant que polynôme annulateur :

$$(X - \lambda_1) \times \cdots \times (X - \lambda_r) \mid \pi_u$$

Mais comme le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, on peut écrire, en notant m_i la multiplicité de la valeur propre λ_i,

$$\pi_u \mid (X - \lambda_1)^{m_1} \times \cdots \times (X - \lambda_r)^{m_r}$$

π_u est donc de la forme $(X - \lambda_1)^{d_1} \times \cdots \times (X - \lambda_r)^{d_r}$ avec, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $1 \leqslant d_i \leqslant m_i$. ■

La recherche d'un polynôme minimal s'en trouve ainsi facilitée. En effet, si $\chi_M = (X-2)^2(X-5)$, il n'y a que deux expressions possibles pour π_M :

$$\pi_M = (X-2)(X-5) \quad \text{ou} \quad \pi_M = (X-2)^2(X-5)$$

Il suffit alors de calculer $(M - 2I_n)(M - 5I_n)$ pour pouvoir conclure.

Exercice 8

Trouver le polynôme minimal de $T = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

Proposition 11.15

Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si, et seulement si, son polynôme caractéristique est X^n.

Donnons une nouvelle preuve de ce résultat déjà démontré dans le précédent chapitre de réduction.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si M est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que X^p annule M. 0 est donc la seule valeur propre possible de M. Comme M admet au moins un valeur propre (complexe), on a $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$ puis $\chi_M = X^n$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $\chi_M = X^n$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $M^n = 0$ donc M est nilpotente. ■

On retrouve à nouveau la majoration de l'indice de nilpotence par la dimension de l'espace.

E – Lemme des noyaux

Faisons un (grand) pas de plus vers la réduction à l'aide du lemme fondamental suivant.

Théorème 11.16 : Lemme de décomposition des noyaux (1)

Si P_1 et P_2 sont deux polynômes premiers entre eux et $u \in \mathscr{L}(E)$, alors :

$$\mathrm{Ker}(P_1P_2(u)) = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u))$$

Démonstration

Tout repose sur la relation de Bézout. P_1 et P_2 étant premiers entre eux, il existe $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$AP_1 + BP_2 = 1, \quad \text{ce qui implique,} \quad A(u)\circ P_1(u) + B(u)\circ P_2(u) = \mathrm{id}_E \quad (*)$$

- Montrons que $\mathrm{Ker}(P_1(u)) \cap \mathrm{Ker}(P_2(u)) = \{0_E\}$. Soit donc $x \in \mathrm{Ker}(P_1(u)) \cap \mathrm{Ker}(P_2(u))$. D'après $(*)$,

$$x = AP_1(u)(x) + BP_2(u)(x) = 0_E$$

- Montrons que $\mathrm{Ker}(P_1(u)) + \mathrm{Ker}(P_2(u)) \subset \mathrm{Ker}(P_1P_2(u))$. L'inclusion découle directement du fait que $\mathrm{Ker}(P_1(u))$ et $\mathrm{Ker}(P_2(u))$ sont tous les deux inclus dans $\mathrm{Ker}(P_1P_2(u))$, ce qui se montre aisément :

$$\forall x \in \mathrm{Ker}(P_1(u)), \quad P_1P_2(u)(x) = P_2P_1(u)(x) = P_2(u)(0_E) = 0_E$$

- Montrons enfin que $\mathrm{Ker}(P_1P_2(u)) \subset \mathrm{Ker}(P_1(u)) + \mathrm{Ker}(P_2(u))$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(P_1P_2(u))$.
Guidés par $(*)$, posons $x_1 = AP_1(u)(x)$ et $x_2 = BP_2(u)(x)$. On a directement $x = x_1 + x_2$ et

$$P_2(u)(x_1) = AP_1P_2(u)(x) = 0_E \quad \text{et} \quad P_1(u)(x_2) = BP_1P_2(u)(x) = 0_E$$

Ainsi, $x_1 \in \mathrm{Ker}(P_2(u))$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(P_1(u))$. ■

Ce théorème est valable sans hypothèse sur la dimension de E. On aboutit, par récurrence, au résultat suivant.

Théorème 11.17 : Lemme de décomposition des noyaux (2)

Si $P_1, \dots, P_r$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors :

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u))$$

Corollaire 11.18

Si $P_1, \dots, P_r$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux de produit égal à P et si P annule $u \in \mathscr{L}(E)$, alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u))$$

On aura ainsi décomposé E en somme de sous-espaces stables par u. Les conséquences et applications de ce résultat figurant dans la prochaine partie sont particulièrement importantes.

Exercice 9

Trouver l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y^{(3)} = y'' + y' + 2y$.

Exercice 10

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = -A$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II | Polynômes annulateurs et réduction

A – Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Théorème 11.19 : Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité (3)

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- Il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u.
- Le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.

Démonstration

Remarquons d'abord que les deux conditions sont équivalentes puisque tout diviseur d'un polynôme scindé à racines simples est lui-même scindé à racines simples.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $P=(X-\lambda_1)\times\cdots\times(X-\lambda_r)$ annule u, les λ_i étant supposés distincts. Les facteurs étant deux à deux premiers entre eux, le lemme des noyaux indique alors que :

$$E=\operatorname{Ker}(P(u))=\bigoplus_{i=1}^{r}\operatorname{Ker}(u-\lambda_i\mathrm{id}_E)$$

Les λ_i sont ainsi valeurs propres de u et u est diagonalisable.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons u diagonalisable et notons $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ ses valeurs propres toutes supposées distinctes. On pose alors $P=(X-\lambda_1)\times\cdots\times(X-\lambda_r)$. Il suffit de montrer que P annule u, ce qui est bien le cas puisque $E=\bigoplus_{i=1}^{r}E_{\lambda_i}(u)$ et pour tout $x\in E_i$,

$$P(u)(x)=\left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r}(u-\lambda_k\mathrm{id}_E)\right]\circ(u-\lambda_i\mathrm{id}_E)(x)=0_E$$

De la même manière, une matrice est diagonalisable si, et seulement si, elle est annulée par un polynôme scindé à racines simples. Inutile d'aller chercher le polynôme minimal si les racines sont simples... Ce théorème montre également que pour que M soit diagonalisable, π_M ne dois pas contenir de facteur de la forme $(X-\lambda)^\alpha$ avec $\alpha>1$.

Exemple

- Si p est un projecteur, $X(X-1)$ annule p. Comme il est scindé à racines simples, p est diagonalisable.
- Si s est une symétrie vectorielle, $(X-1)(X+1)$ annule s. Comme il est scindé à racines simples, s est diagonalisable.

Attention, les polynômes précédents ne sont pas toujours minimaux (mais peu importe !).

Exercice 11

Préciser si les matrices suivantes sont diagonalisables : $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\-1&1&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&3&2\\-1&3&1\\-3&3&4\end{pmatrix}$.

Nous pouvons alors démonter un précieux corollaire de ce théorème.

Corollaire 11.20

Si u est diagonalisable, alors pour tout sous-espace vectoriel F non réduit à $\{0_E\}$ et stable par u, l'endomorphisme induit par u sur F est diagonalisable.

Démonstration

Puisque $\pi_{u_{|F}}$ divise π_u, π_u annule $u_{|F}$. Comme il est scindé à racines simples (u étant supposé diagonalisable), $u_{|F}$ est diagonalisable. ■

Exercice 12

Trouver, dans les cas des matrices A et C de l'exercice précédent, l'ensemble des sous-espaces stables.

B – Réduction des endomorphismes à polynômes annulateurs scindés

Rappelons tout d'abord que u est trigonalisable si, et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$. On en déduit qu'un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé, ou, ce qui revient au même, s'il admet un polynôme annulateur scindé. On peut même obtenir une forme réduite plus aboutie.

Théorème 11.21

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. S'il existe un polynôme scindé annulant u, E est la somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

La version matricielle de ce théorème est sans doute plus intelligible.

Théorème 11.22

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe un polynôme scindé annulant M, alors M est semblable à une matrice diagonale par blocs triangulaires supérieurs. Autrement dit, à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_r \end{pmatrix}, \text{ où chaque bloc } T_i \text{ est de la forme } \begin{bmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Démonstration

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, où E est supposé de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$ annule u.

Quitte à considérer le polynôme minimal de u, on peut se contenter du cas où pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(u)$. On pose alors $F_i = \mathrm{Ker}\big((u - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i}\big) = \mathrm{Ker}(P_i(u))$ où $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$.

- Comme les polynômes P_i sont deux à deux premiers entre eux, le lemme des noyaux nous donne :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\big((u - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i}\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$$

- Les sous-espaces vectoriels F_i sont stables par u en tant que noyaux de polynômes en u. Comme λ_i est valeur propre de u et $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id}_E) \subset F_i$, $\dim(F_i) \geqslant 1$.
- On note u_i l'endomorphisme induit par u sur F_i. $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$ annule u_i. Comme λ_i est la seule racine de P_i, c'est l'unique valeur propre de u_i.
- Il suffit alors de poser $n_i = u_i - \lambda_i \mathrm{id}_{F_i}$ et de constater que n_i est nilpotent. En effet, $n_i^{m_i} = 0_{\mathscr{L}(F_i)}$. ■

Nous ne sommes plus très loin de décompositions plus intéressantes comme la décomposition de Dunford qui permet de d'écrire toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sous la forme $M = D + N$ avec D diagonale, N nilpotente et $ND = DN$ (pratique pour les calculs de puissances!) mais cette décomposition est hors programme.

Néanmoins, la forme obtenue nous donne dans certains cas une méthode effective de trigonalisation, à condition bien entendu que le polynôme caractéristique/minimal/annulateur soit scindé.

Exercice 13

Trigonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ à l'aide d'une base de $\mathrm{Ker}\big((M - I_3)^2\big)$.