# Réduction #2

Travaux dirigés #11

## Partie A – Sous-espaces stables

**Exercice 1 —** Soit $E$ un endomorphisme de dimension finie. On considère un endomorphisme $u$ diagonalisable.

1. Rappeler pourquoi la restriction de $u$ à tout sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.
2. En déduire que tout sous-espace vectoriel stable est somme directe de droites propres.
3. Trouver les sous-espaces stables de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 2 —** Soient $u, v$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie non nulle, vérifiant $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $u$ et $v$ ont un vecteur propre commun.

**Exercice 3 —** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB = 0$.

1. Montrer que $A$ et $B$ possèdent un vecteur propre en commun.
2. Montrer par récurrence que $A$ et $B$ sont simultanément trigonalisables.

**Exercice 4 —** Soient $E$ un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension 3 et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 = \mathrm{id}_E$.

1. Décrire les sous-espaces stables de $u$.
2. Même question lorsque $E$ est un $\mathbb{R}$-e.v.

## Partie B – Polynômes annulateurs et équations matricielles

**Exercice 5 —** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose $A$ nilpotente. Montrer de deux manières que $A^n = 0$.
2. On suppose $A$ inversible.
   a) Montrer de deux manières que $A^{-1}$ est un polynôme en $A$.
   b) Comparer les polynômes minimaux de $A$ et $A^{-1}$.

**Exercice 6 —** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, non constant, tel que $AB = P(A)$ et $P(0) \neq 0$. Montrer que $A$ est inversible et que $A$ et $B$ commutent.

**Exercice 7 —** Soit $A \in \mathcal{GL}_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$.

1. Montrer que $A$ est diagonalisable.
2. On suppose de plus que $\mathrm{Tr}(A) = 8$. Déterminer $\chi_A$.

**Exercice 8 —** Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A^2 = A$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

**Exercice 9 —** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

**Exercice 10 —** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

**Exercice 11 —** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I_n$. Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projecteur.

**Exercice 12 —** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + A^T = I_n$.

1. Montrer que $A$ n'est pas inversible si et seulement si $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$.
2. Trouver un polynôme annulateur de $A$ de degré 4 et en déduire que $A$ est diagonalisable.

**Exercice 13 —** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ telle que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit libre. Montrer que seuls les polynômes en $u$ commutent avec $u$.

## Partie C – Polynôme minimal

**Exercice 14 —** Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sont-elles diagonalisables ?

**Exercice 15 —** Le polynôme $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ peut-il être le polynôme minimal d'une matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ ?

**Exercice 16 —** Comparer le polynôme minimal de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ aux polynômes minimaux des matrices :

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

**Exercice 17 —** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, où $E$ est un espace vectoriel de dimension quelconque, admettant un polynôme minimal $\pi_u$.

1. Montrer que l'endomorphisme $u$ est bijectif si et seulement s'il est injectif.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P$ et $\pi_u$ premiers entre eux.
   Montrer que $P(u)$ est bijectif.
3. Si $P(u)$ n'est pas bijectif, le polynôme $P$ divise-t-il $\pi_u$ ?

## Partie D – Polynômes d'endomorphismes et réduction

**Exercice 18 —** Soit $\psi$ l'application définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \psi(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$$

1. Montrer que $\psi$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ diagonalisable.
2. Quels sont ses éléments propres ?

**Exercice 19 —** Soient $E$ un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie et $f$ un endomorphisme de $E$ admettant un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est le noyau d'un polynôme en $f$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ où la matrice de $f$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } A \text{ inversible}$$

**Exercice 20 —** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice d'un projecteur. On note $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AM + MA$.

1. Trouver un polynôme annulateur de $\varphi$.
2. Prouver que $\varphi$ est diagonalisable.

**Exercice 21 —** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et les deux applications $\varphi$ et $\psi$ définies par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = AM \quad \text{et} \quad \psi(M) = MA$$

1. Montrer que $\pi_\varphi = \pi_\psi = \pi_A$. En déduire que $\varphi$ et $\psi$ sont diagonalisables si, et seulement si, $A$ est diagonalisable.
2. Montrer que $\varphi$, $\psi$ et $A$ partagent les mêmes valeurs propres. Décrire les sous-espaces propres de $\varphi$ et $\psi$ en fonction des sous-espaces propres de $A$.

**Exercice 22 —** *Matrices circulantes, le retour !*
Soit $n \geqslant 2$. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_{n-1} \\ m_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & m_1 \\ m_1 & \cdots & m_{n-1} & m_0 \end{pmatrix}$$

On note $A$ la matrice obtenue pour $m_1 = 1$ et $m_0 = m_2 = \cdots = m_{n-1} = 0$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de $A$ et exprimer ses valeurs propres à l'aide des racines $n$–ièmes de l'unité.
2. Montrer que la matrice $M$ est diagonalisable et préciser son déterminant.

**Exercice 23 —** *Réduction simultanée*
Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $u$ et $v$ deux endomorphismes diagonalisables vérifiant $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que la restriction de $v$ à tout sous-espace propre de $u$ définit un endomorphisme diagonalisable.
2. Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation à $u$ et $v$.

**Exercice 24 —** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ vérifiant $u \circ v - v \circ u = v$.

1. Calculer $u \circ v^p - v^p \circ u$.
2. En déduire, grâce à l'endomorphisme $f \mapsto u \circ f - f \circ u$, que $v$ est nilpotent.
3. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que $u$ et $v$ ont un vecteur propre commun.

**Exercice 25 —** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A$ est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Tr}\left(A^k\right) = 0$.

**Exercice 26 —** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On note enfin $f$ l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ défini par $v \mapsto u \circ v$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathrm{Sp}(u)$.
2. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $E_\lambda$ le sous-espace propre associé et $v$ un projecteur sur $E_\lambda$. Montrer que $v$ est un vecteur propre de $f$ et en déduire que $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(u)$.
3. Soient $E_\lambda$ et $\Delta_\lambda$ les sous-espaces propres respectivement associés à $u$ et à $f$ pour la même valeur propre $\lambda$. On admet que $\dim(\Delta_\lambda) = n\dim(E_\lambda)$. Montrer que si $u$ est diagonalisable, alors $f$ est diagonalisable.
4. Montrer que $u$ et $f$ ont le même polynôme minimal.

🚲 **Exercice 27 —** *Commutant d'un endomorphisme*
Soit $f$ un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$. On note $\mathscr{C}_f$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec $f$.

1. Montrer que $\mathscr{C}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
2. Montrer qu'un endomorphisme $g$ appartient à $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si, chaque sous-espace propre de $f$ est stable par $g$.
3. En considérant les restrictions aux sous-espaces propres de $f$ de tout endomorphisme commutant avec $f$, montrer que $\dim(\mathscr{C}_f) = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} m(\lambda)^2$.
4. Comparer $\mathbb{K}[f]$ et $\mathscr{C}_f$.
5. On suppose que les valeurs propres de $f$ sont simples. Montrer que $(\mathrm{id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathscr{C}_f$.

**Exercice 28 —** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ de polynôme minimal $(X-1)^2$.

1. On pose $g = f - \mathrm{id}_E$. Comparer $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$.
2. En déduire qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale par blocs, avec uniquement des blocs de la forme $\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

$\boxed{\texttt{CCINP}}$ Exercices 62, 65, 88, 91, 93.