9 Séries entières

« Un mathématicien qui n'est pas aussi quelque peu poète ne sera jamais un mathématicien complet. »
Extrait d'une lettre de Karl Weierstrass à Sophie Kowalevski (1883)

Plan de cours

♦ **Introduction –** Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) = y(x) \quad (\mathcal{E})$$

Nous savons que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle linéaire du 1^er^ ordre sans second membre constitue une droite vectorielle. Les solutions sont donc toutes de la forme $x \mapsto \lambda f(x)$ où f représente une solution non triviale quelconque de cette équation (c'est-à-dire une solution non nulle).

- Recherchons dans un premier temps une solution f sous forme polynomiale. Posons pour cela :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

Inutile cependant d'effectuer le moindre calcul ! L'égalité $f'(x) = f(x)$ montre, pour des questions de degré, que seul le polynôme nul convient.

- Recherchons maintenant [1] des solutions de la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Attention, rien ne dit qu'une telle somme existe, autrement dit que la série associée converge. Supposons pour nos besoins qu'il en est ainsi et permettons-nous même de dériver cette somme terme à terme (terrain glissant !). En injectant le résultat dans l'équation $(\mathcal{E})$, il vient :

$$f'(x) = f(x) \iff \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \iff \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Par raisonnement analogue à celui qu'on a l'habitude d'effectuer sur des polynômes (c'est-à-dire par *identification*), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) a_{n+1} = a_n$$

Ce qui conduit rapidement à $a_n = \dfrac{a_0}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, si toutes les opérations effectuées sont licites, en prenant arbitrairement $a_0 = 1$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

apparaît comme une solution de l'équation $(\mathcal{E})$.

- L'équation $(\mathcal{E})$ n'est cependant pas très mystérieuse, nous savons que ses solutions sont de la forme $x \mapsto \lambda e^x$. Comme la fonction exponentielle est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ qui vérifie la condition initiale $y(0) = 1$, on trouve alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

1. Pourquoi diantre se limiter à des sommes finies...

Ce premier exemple soulève de nombreuses questions auxquelles nous allons essayer de répondre à travers ce chapitre, à savoir :

– À quelle(s) condition(s) sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sur $x \in \mathbb{K}$ la série $\sum a_n x^n$ converge-t-elle ?
– Peut-on dériver la somme d'une telle série ?
– Peut-on identifier les coefficients ?
– Toute fonction (comme la fonction exponentielle) peut-elle s'écrire comme la somme d'une telle série ?

I | Rayon de convergence d'une série entière

$\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A – Définition et propriétés

Définition 9.1 : Série entière

Une série entière de variable réelle ou complexe z est une série de la forme $\sum a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{K}$.
Les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelés coefficients de la série entière.

La fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est définie en z_0 lorsque la série $\sum a_n z_0^n$ converge.

Définition 9.2 : Domaine de convergence

On appelle domaine de convergence l'ensemble de définition de la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Exercice 1

Déterminer le domaine de convergence des trois séries entières suivantes :

$$\sum z^n \; ; \quad \sum z^{n^2} \; ; \quad \sum \frac{(\pi z)^n}{n^3+2}$$

Oui, la deuxième série est bien une série entière !

On remarquera qu'un polynôme est un cas très particulier de série entière.

Lemme 9.3 : Lemme d'Abel

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration

Supposons z_0 non nul et l'existence un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z_0^n| \leqslant M$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \right| \leqslant M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

Comme $|z| < |z_0|$, la série de terme général $\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ converge en tant que série géométrique de raison strictement inférieure à 1. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum a_n z^n$ convergent absolument. ■

Définition 9.4 : Rayon de convergence

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ l'élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$ défini par :

$$R = \sup\left\{r \geqslant 0 \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$$

D'après le lemme d'Abel, si $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument (donc converge).

Exemples

$\sum z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$ et $\sum \frac{(\pi x)^n}{n^3+2}$ a pour rayon de convergence $R = \frac{1}{\pi}$.

Théorème 9.5

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- Si $|z| < R$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$ alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
- Si $|z| = R$ alors on ne peut rien dire.

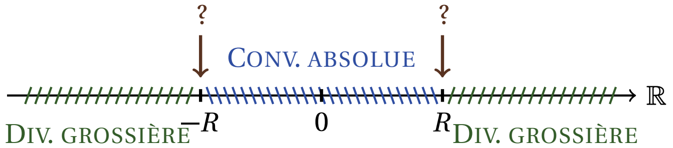
Ce théorème montre que $\boxed{R = \sup\{r \geqslant 0 \mid \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\}}$

Démonstration

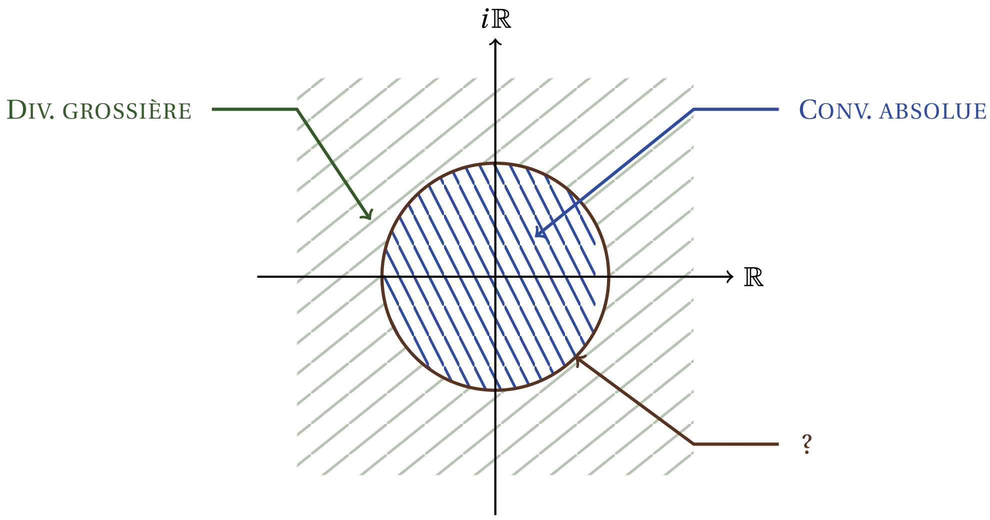
Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$. Rappelons que par définition,

$$R = \sup\left\{r \geqslant 0 \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$$

- Si $|z| < R$ alors il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $|z| < r < R$.
  Comme $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, d'après le lemme d'Abel, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- Si $|z| > R$ alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc ne converge pas vers 0.
  Ainsi, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.



Le domaine de convergence est dans le cas réel un intervalle du type $]-R,R[$, $]-R,R]$, $[-R,R[$ ou bien $[-R,R]$.



Le domaine de convergence est dans le cas complexe constitué du disque ouvert de convergence et de points situés sur le cercle de convergence.

Définition 9.6

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $]-R,R[$ est appelé intervalle ouvert de convergence.
- Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $D(0,R)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<R\}$ est appelé disque ouvert de convergence.

Exemple

Étudier la convergence de la série $\sum \dfrac{x^n}{n}$ pour $x\in\mathbb{R}$.

- Si $|x|<1$, $0\leqslant \left|\frac{x^n}{n}\right|\leqslant |x|^n$ donc par comparaison, la série converge absolument.
- Si $|x|>1$, $\left|\frac{x^n}{n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série diverge grossièrement.
- Si $x=1$, on retrouve la série harmonique qui diverge.
- Si $x=-1$, on retrouve la série harmonique alternée qui converge.

B – Détermination pratique du rayon de convergence

1 – Encadrement du rayon de convergence

Si l'on connaît la nature de $\sum a_n z_0^n$ pour un z_0 donné, on peut en déduire des informations sur le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Proposition 9.7 : Encadrement du rayon de convergence

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0\in\mathbb{C}$.

- Si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $|z_0|\leqslant R$
- Si $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $|z_0|\geqslant R$.
- Si $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente, alors $|z_0|=R$. On est sur le cercle de convergence.

Exemple

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente. On en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{x^n}{n}$ est 1.

2 – Utilisation de la règle de d'Alembert

La règle de d'Alembert relative aux séries numériques à termes strictement positifs nous permet la plupart du temps de déterminer le rayon de convergence d'une série entière. Observons les exemples suivants.

Exemple 1

Considérons la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n}$ et posons $u_n=\dfrac{x^n}{n}$. Pour $x\neq 0$, appliquons la règle de d'Alembert pour étudier la convergence absolue de la série.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right| = \frac{n}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| = \ell$$

- Si $\ell<1$, c'est-à-dire si $|x|<1$, alors la série converge absolument.
- Si $\ell>1$, c'est-à-dire si $|x|>1$, alors la série ne converge pas absolument.

On a donc immédiatement $R=1$.

Exemple 2

Considérons la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{2^n}$. Remarquons qu'il s'agit bien d'une série entière. Notons u_n son terme général et étudions pour $x \neq 0$ la convergence absolue de $\sum u_n$ à l'aide de la règle de d'Alembert :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{x^{2n}} = \frac{x^2}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x^2}{2} = \ell$$

- Si $\ell < 1$, c'est-à-dire si $|x| < \sqrt{2}$, alors la série converge absolument.
- Si $\ell > 1$ alors la série ne converge pas absolument.

On en déduit que le rayon de convergence de la série vaut $\sqrt{2}$.
Le lecteur aura bien noté que dans ce cas, l'utilisation de la règle de d'Alembert est totalement farfelue : la série étudiée est une série géométrique de raison $x^2/2$...

3 – Comparaison de séries entières

Proposition 9.8 : Majoration

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.
On suppose que $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang. Alors, $R_a \geqslant R_b$.

Démonstration

Par comparaison de séries à termes positifs, si $\sum |b_n z^n|$ converge, il en va de même pour $\sum |a_n z^n|$.
Ainsi, si $|z| < R_b$ alors $|z| < R_a$. D'où $R_a \geqslant R_b$. ■

Exercice 2

Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum \sin(n) x^n$?

Proposition 9.9 : Équivalent

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.
Alors elles ont même rayon de convergence.

Démonstration

On applique la règle des équivalents aux séries à termes positifs $\sum |a_n z^n|$ et $\sum |b_n z^n|$. ■

Exercice 3

Que vaut le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right) x^n$?

Proposition 9.10

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.
On suppose que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(b_n)$. Alors $R_a \geqslant R_b$.

4 – Rayon de $\sum n a_n z^n$

Proposition 9.11

Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration

Notons respectivement R et R' les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$.

- Remarquons que si $(n a_n z^n)$ est bornée, il en va de même pour $(a_n z^n)$. Ainsi, $R' \leqslant R$.
- Introduisons maintenant $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Montrons que $|z| < R'$ en considérant un réel r tel que $|z| < r < R$:
$$|n a_n z^n| = \left| a_n r^n \times n \left(\frac{z}{r}\right)^n \right| \leqslant M \times |a_n r^n| \quad \text{car} \quad n \left|\frac{z}{r}\right|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Comme $\sum a_n r^n$ converge absolument, il en va de même pour $\sum n a_n z^n$. Ainsi, $|z| < R'$.

On a bien montré que $R = R'$. ■

On peut aisément généraliser la preuve précédente et montrer que pour tout réel α, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exemple

On retrouve facilement le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$.

Exercice 4

Quel est le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{n^{2020}}$?

C – Opérations sur les séries entières

Proposition 9.12 : Somme de séries entières et multiplication par un scalaire

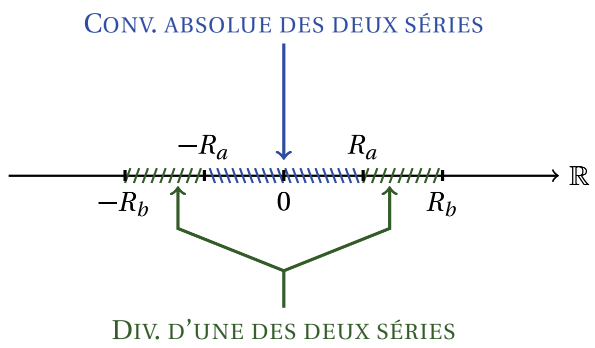
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

(i) $\sum (a_n + b_n) z^n$ est une série entière de rayon de convergence R avec $R = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ ou $R \geqslant R_a$ si $R_a = R_b$.

(ii) $\sum \lambda a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R_a si $\lambda \neq 0$ ou $+\infty$ si $\lambda = 0$.

Démonstration

Démontrons seulement le premier point. Illustrons d'abord le résultat.



- Supposons sans perte de généralité que $R_a < R_b$.
Pour tout z tel que $|z| < R_a$, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge.
Ainsi, $R \geqslant R_a$.
Si $R_a < |z| < R_b$, $\sum a_n z^n$ diverge et $\sum b_n z^n$ converge donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge. Ainsi, $R \leqslant R_a$.
Finalement, $R = R_a$.
- Supposons que $R_a = R_b$.
Pour tout z tel que $|z| < R_a$, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge.
Ainsi, $R \geqslant R_a$.
Pour $|z| > R_a = R_b$, les deux séries divergent donc on ne peut rien dire sur la somme. ■

Proposition 9.13 : Produit de Cauchy de deux séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.
Alors le produit de Cauchy des deux séries est une série entière de la forme $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$
et son rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$. De plus, pour $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Démonstration

- Le produit de Cauchy nous donne bien une série entière :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k}$$

- Si $|z| < \min(R_a, R_b)$ alors les deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes. On en déduit, par produit de Cauchy, que la série $\sum c_n z^n$ est absolument convergente et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

- Ceci prouve bien que $R \geqslant \min(R_a, R_b)$. ■

Exemple

Nous avions vu lors du dernier chapitre que :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$$

Dans ce cas, le rayon de convergence vaut précisément $1 = \min(R_a, R_a)$ mais l'inégalité peut être stricte.

Exercice 5

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$. Notons f la fonction somme associée.
Déterminer une expression de $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) z^k$ en fonction de $f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

II | Propriétés de la somme d'une série entière d'une variable réelle

On s'intéresse ici uniquement aux séries entières de variable réelle. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$. Rappelons que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur $]-R, R[$, $]-R, R]$, $[-R, R[$ ou $[-R, R]$.
Que dire de la régularité de la fonction somme sur le domaine de convergence de la série ?

Théorème 9.14

Une série entière converge normalement, donc uniformément, sur tout segment inclus dans l'intervalle *ouvert* de convergence.

Démonstration

Notons R le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$. Soit r un réel vérifiant $0 < r < R$.

$$\forall x \in [-r, r], \quad |a_n x^n| \leqslant a_n r^n$$

Comme $\sum a_n r^n$ converge, $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-r, r]$. ■

Attention, il n'y a *a priori* pas convergence normale sur l'intervalle de convergence, seulement sur tout segment inclus dans l'intervalle *ouvert* ! Par exemple, la série de fonctions $\sum x^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$. Mais la propriété démontrée suffit à assurer la continuité de $x \mapsto \sum a_n x^n$ sur tout intervalle de la forme $[-r,r]$ inclus dans le domaine *ouvert* de convergence donc sur le domaine ouvert de convergence.

Théorème 9.15 : Continuité

La somme d'une série entière réelle est continue sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exemple

$f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ est continue sur $]-1,1[$.

Attention, si ce théorème nous garantit la continuité de la somme d'une série entière sur $]-R,R[$, il ne dit rien de l'éventuelle continuité en R et en $-R$ en cas de convergence.

Exercice 6

Montrer que la somme de la série $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n^2}$ est continue sur $[-1,1]$.

On peut en fait démontrer qu'en cas de convergence en R, il y a toujours convergence uniforme de la série entière sur $[0,R]$ et donc continuité au bord du domaine [2].

Théorème 9.16 : Dérivation terme à terme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R. On note $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme.

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R,R[$, $\sum n a_n x^{n-1}$ est une série entière de rayon de convergence R et :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

- Ce théorème nous permet de calculer très facilement la dérivée de la somme d'une série entière.
- On sait que f est au moins dérivable sur $]-R,R[$ mais on ne peut rien dire en R ou en $-R$ même si f y est définie (et continue d'après le commentaire précédent) !

Démonstration

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto a_n x^n$.
Soit r un réel vérifiant $0 < r < R$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-r,r]$. De plus, si $n \geqslant 1$, pour tout $x \in [-r,r]$, $f_n'(x) = n a_n x^{n-1}$.
- La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ converge simplement sur $[-r,r]$.
- La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n x^{n-1}$ a pour rayon de convergence R donc converge uniformément sur $[-r,r]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-r,r]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Cette propriété s'étend donc sur $]-R,R[$ et l'on a :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

■

2. c'est le théorème de convergence radial d'Abel, mais ce dernier ne figure pas au programme.

Corollaire 9.17

La somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exemple

Calculons la somme de $\sum_{n\geqslant 1} n x^n$. Notons pour cela f la somme de la série entière $\sum x^n$ de rayon de convergence égal à 1. Pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Par dérivation terme à terme, $\sum_{n\geqslant 1} n x^n$ a même rayon de convergence et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Donc, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x f'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Exercice 7

Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} x^p$.

Théorème 9.18 : Intégration terme à terme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R. On note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme et F une primitive de f. $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est une série entière de rayon de convergence R et :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Démonstration

$\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ et $\sum a_n x^n$ ont même rayon de convergence. Il suffit alors d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme relatif aux séries de fonctions grâce à la convergence uniforme sur tout segment $[-r,r] \subset]-R,R[$. ■

Ne pas oublier la constante d'intégration !

Exemple

Calculons la somme de $\sum \frac{x^n}{n}$ pour $x \in [-1,1[$. Notons pour cela f la somme de la série entière $\sum x^n$ de rayon de convergence égal à 1. Pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Par intégration terme à terme, pour tout $x \in]-1,1[$, $F(x) = -\ln(1-x) = \ln(1) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Donc, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

Exercice 8

Calculer de même, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

III | Développements en série entière

A – Généralités

Définition 9.19 : Fonction développable en série entière

Une application est développable en série entière (au voisinage de 0) sur $]-r,r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R avec $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Quelles propriétés doit vérifier une fonction pour être développable en série entière au voisinage de 0 ?

Théorème 9.20 : Condition nécessaire

Si f admet un développement en série entière sur $]-r,r[$ alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$, son développement en série entière est unique et est donné par sa série de Taylor : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Démonstration

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall x \in]-r,r[$ $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- Le fait que f soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ découle du théorème de dérivation terme à terme de la somme d'une série entière. Par récurrence, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$.
- De plus, $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$, $f''(0) = 2a_2$, ..., $f^{(n)}(0) = n!a_n$. ■

Exercice 9

Montrer que si $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.

La réciproque du théorème est fausse : toute fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ n'est pas développable en série entière.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ puis prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. Conclure.

Indication : *On pourra montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$.*

Corollaire 9.21 : Unicité du développement en série entière

Soit $r > 0$ quelconque. Si pour tout $x \in]-r,r[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Les propriétés suivantes peuvent s'avérer utiles :

- Si f est paire, f' est impaire.
- Si f est paire (resp. impaire), son développement en série entière ne contiendra que des puissances paires (resp. impaires).

B – Développements en série entière usuels

1 – Série exponentielle et fonctions trigonométriques

Rappelons la précieuse inégalité de Taylor-Lagrange.

Théorème 9.22 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$. Alors,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^n \right| \leqslant M \cdot \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cette inégalité nous avait permis (cf. chapitre *Séries numériques*) de montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Le rayon de convergence de cette série entière est donc $+\infty$, ce que la règle de d'Alembert nous permet de retrouver facilement. Une telle approche nous permet d'obtenir les développements en série entière des fonctions cosinus et sinus, ainsi que de leurs cousines cosinus et sinus hyperboliques. Mais il y a plus simple ! En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{2\cdot n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n x^n}{2\cdot n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2\cdot n!} \cdot i^n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{i^{2p} x^{2p}}{(2p)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}$$

On trouve de même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Rappelons enfin que grâce à un produit de Cauchy, on retrouve que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{z'}$.

2 – Logarithme

Pour tout $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Donc par intégration terme à terme,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1-x) = \ln(1) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

3 – Arctangente

De même, pour tout $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n}$. Donc par intégration terme à terme,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arctan(x) = \arctan(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$$

Notons que le développement en série entière n'est pas valable sur $\mathbb{R}$, bien que arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4 – Développement en série entière de $(1+x)^\alpha$

Soit $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer son développement en série entière. Pour tout $x > -1$,

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

f est donc solution de l'équation différentielle $(1+x)y' = \alpha y$. C'est même l'unique solution de l'équation vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$ par unicité au problème de Cauchy.

Soit y une solution de l'équation développable en série entière. On a $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

En injectant dans l'équation, on trouve :

$$\begin{aligned}(1+x)y'(x) - \alpha y(x) = 0 \quad &\iff \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^k - \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0 \\ &\iff \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k x^k - \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0 \\ &\iff \quad \sum_{k=0}^{+\infty} [(k+1)a_{k+1} - (\alpha - k)a_k]\, x^k = 0\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{k+1} = \dfrac{\alpha - k}{k+1} \cdot a_k$.
Une simple récurrence conduit à :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \cdot a_0$$

Pour $a_0 = 1$, y est solution de l'équation et vérifie $y(0) = 1$. Par unicité de la solution, $y = f$. Ainsi,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \cdot x^k$$

Reste à trouver le rayon de convergence de la série entière, en observant que tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang si et seulement si α est un entier naturel.

- Supposons d'abord que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.
  Appliquons la règle de d'Alembert : $\left| \dfrac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \left| \dfrac{\alpha - k}{k+1} \right| \cdot |x| \xrightarrow[k \to +\infty]{} |x|$. Donc $R = 1$.
- En revanche, si $\alpha \in \mathbb{N}$ (mettons $\alpha = n$), les a_k sont tous nuls à partir du rang $n+1$. Donc $R = +\infty$ et on retrouve la formule du binôme :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

5 – Synthèse

Voici la liste des développements usuels à connaître par cœur :

$R = +\infty$	$\mathbb{C}$	$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$
$R = +\infty$	$\mathbb{R}$	$\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$R = +\infty$	$\mathbb{R}$	$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$R = 1$	$]-1,1[$	$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
$R = 1$	$]-1,1[$	$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$
$R = 1$	$]-1,1[$	$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$

C – Méthode pratique pour obtenir un développement en série entière

❶ Utilisation des développements usuels et des opérations sur les séries entières (somme et produit).

Exemple

Déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto x\ln(1-x)+2\mathrm{e}^x$.
$f(x)=2+2x+\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{2}{n!}\right)x^n$.

❷ Dérivation et intégration terme à terme.

Exemple

$x\mapsto\ln(1-x)$.

❸ Utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exemple

$x\mapsto\exp(x)$.

❹ Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

$$\forall x\in]-a,a[,\qquad \frac{1}{x-a}=\frac{-1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a}}=\frac{-1}{a}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n\;;\qquad \frac{1}{(x-a)^2}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x-a}\right)=\frac{1}{a^{n+1}}\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{n-1}$$

Exemple

Déterminer le développement en série entière de $x\mapsto\dfrac{1}{x^2-5x+6}$.
$\dfrac{1}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$.

❺ Utilisation d'une équation différentielle.

Exemple

Soit $g : x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2/2}\,\mathrm{d}t$. Déterminer son développement en série entière.
g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle $y'=1-xy$. En cherchant une solution sous forme de série entière, on trouve une relation liant les coefficients a_n de la série :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad a_{n+1}(n+1)+a_{n-1}=0 \text{ et } a_1=1$$

Par unicité de la solution au problème de Cauchy, en prenant $a_0=0$, on trouve $a_{2n}=0$ et :

$$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n2^nn!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?