Séries entières

Travaux dirigés #09

Partie A – Rayon de convergence

Exercice 1 — Déterminer le rayon de convergence des séries entières de terme général $a_n x^n$ avec :

$$a_n = 1 \qquad a_n = n \qquad a_n = \frac{1}{n} \qquad a_n = \frac{1}{n^2} \qquad a_n = \sin n$$

$$a_n = n! \qquad a_n = \frac{1}{n!} \qquad a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} \qquad a_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n} \qquad a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Exercice 2 — Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum n! z^{2n} \; ; \quad \sum \frac{z^{n!}}{n!} \; ; \quad \sum \sin(n) z^n \; ; \quad \sum \frac{\cos^2 n}{n} \cdot z^n \; ;$$

$$\sum 5^n z^{2n+1} \; ; \quad \sum a_n z^n \quad \text{avec} \quad a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$$

Exercice 3 — Déterminer le domaine de convergence des deux séries entières :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{3^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{\ln(n!)}$$

Exercice 4 — Quel lien entre les rayons de convergence de $\sum a_n^2 z^n$ et $\sum a_n z^n$?

Exercice 5 — Déterminer le rayon de convergence des séries entières de terme général $a_n z^n$ avec :

$$a_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \qquad a_n = \frac{n^2}{3^n + n}$$

$$a_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) \qquad a_n = \frac{\operatorname{ch} n}{n} \qquad a_n = \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n$$

Partie B – Calcul de sommes

Exercice 6 — Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes, calculer leur somme et, s'il y a lieu, étudier la convergence aux bornes.

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)} \; ; \quad \sum \operatorname{ch}(n) x^n \; ; \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n)!} \; ; \quad \sum \frac{x^n}{2n+1}$$

Exercice 7 — Déterminer le rayon de convergence des séries entières réelles suivantes en précisant leur somme.

$$\sum \frac{x^n}{n(n+2)} \; ; \quad \sum \frac{n^2+n+1}{n} x^n \; ; \quad \sum \frac{n^2+2n-1}{(n+1)!} x^n \; ; \quad \sum \frac{2n+1}{2n+3} x^n \; ;$$

$$\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n \; ; \quad \sum \frac{\operatorname{ch}(n)}{n!} x^n \; ; \quad \sum \frac{x^{3n}}{(3n)!} \; ; \quad \sum \frac{(-1)^n}{4n} x^{4n-1}$$

Exercice 8 — Donner, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence et la somme de :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n \cos(n\alpha)}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n \sin(n\alpha)}{n!}$$

Exercice 9 — Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de :

$$\sum_{n\geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

Exercice 10 — On pose, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q \, \mathrm{d}t$$

1. Calculer $I(p,q)$.
2. La série de terme général $u_n = I(n,n)$ est-elle convergente?
3. Préciser le domaine de convergence de $\sum u_n x^n$.
4. Calculer enfin la somme de cette série entière.

Exercice 11 — Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1,1[$.
3. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Exercice 12 — On pose, sous réserve d'existence, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1.
3. Établir la continuité de f en -1.
4. Déterminer à l'aide d'une minoration la limite de f en 1.

Exercice 13 — `Python`
Sachant que $\pi = 6 \arcsin \frac{1}{2}$, utiliser un développement en série entière permettant d'obtenir un nombre donné de décimales exactes de π à l'aide de Python.

Partie C – Développements en série entière

Exercice 14 — Déterminer un développement en série entière des fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence et on étudiera la convergence au bord.

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{2-x}\right) \ ; \quad g(x) = \mathrm{sh}(x)\cos(x) \ ;$$

$$h(x) = \arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right) \ ; \quad k(x) = \frac{1}{x^2+x+1} \ ; \quad l(x) = \arcsin(x)$$

Exercice 15 — En utilisant la technique de l'équation différentielle, trouver les développements en série entière des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \arcsin^2(x) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto [\ln(1+x)]^2$$

Exercice 16 — Montrer que l'application $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 —

1. Former de deux façons le développement en série entière en 0 de
$$f : x \mapsto e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} \, dt$$
2. En déduire la relation $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \binom{2n}{n} = \frac{4^n}{2n+1}$.

Exercice 18 — Déterminer le développement en série entière en 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6) \ ; \quad g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{3-x^2}\right) \ ; \quad h(x) = \cos x \cdot \mathrm{ch} x \ ;$$

$$k(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) \ ; \quad l(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \ ; \quad m(x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1} \ ;$$

$$p(x) = \int_0^x \cos(t^2) \, dt \ ; \quad r(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t^2+t^4}$$

Exercice 19 — Pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, déterminer le développement en série entière de :

$$x \mapsto \mathrm{sh}(\arcsin x) \ ; \quad x \mapsto \int_x^1 \frac{1-\cos t}{t} \, dt \quad \text{et} \quad x \mapsto \arctan\left(\frac{x \sin\theta}{1 - x\cos\theta}\right)$$

Partie D – Intégration terme à terme

Exercice 20 —

1. Montrer que pour tout $a \in]0,1[$, l'intégrale $\int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} \, dx$ converge.
2. Justifier que pour tout $a \in]0,1[$,
$$\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2} \, dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$$
3. En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^1 \frac{x+\ln(1-x)}{x^2} \, dx$.

Exercice 21 — Soit $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R>0$. Calculer, pour $r\in[0,R[$, l'intégrale suivante :

$$I_r=\int_0^{2\pi} f\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)\,\mathrm{d}\theta$$

Exercice 22 — Déterminer la somme des séries numériques suivantes.

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exercice 23 — On considère un réel a non nul.

1. a) Montrer que si $a>0$,

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^a}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{na+1}$$

   b) En déduire les somme des séries $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

2. Montrer que si $a<0$,

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^a}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{-na+1}$$

Partie E – Séries entières et équations différentielles

Exercice 24 — On pose $a_n=\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

1. Établir la relation : $\forall n\in\mathbb{N},\quad (n+1)a_{n+1}=2(2n-1)a_n$
2. Donner le rayon de convergence (noté R) de la série entière $\sum a_nx^n$.
3. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on explicitera et en déduire f.

Exercice 25 — Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0=a_1=1 \\ \forall n\geqslant 0,\quad a_{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{a_n}{n+2}\end{cases}$$

On s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$.

1. a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1\leqslant a_n\leqslant n+2$.
   b) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et déterminer le rayon de convergence de la série entière.
2. On pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ et $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+2}x^{n+2}$.
   a) Déterminer le domaine de définition de f et g.
   b) Établir une relation entre $f(x)$ et $g(x)$.
   c) Montrer que g est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on déterminera.
   d) En déduire une expression de $f(x)$.

CCINP Exercices 2, 15, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 47 et 51.