

Suites et séries de fonctions

Travaux dirigés #08

Partie A – Suites de fonctions

Exercice 1 — Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où :

$$f_n : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} \end{cases}$$

Exercice 2 — Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où f_n est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

converge uniformément sur tout segment de \mathbb{R} .

Exercice 3 — Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto n \cos^n(x) \sin(x)$.

- Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
- Comparer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx$ et $\int_0^{\pi/2} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$. Qu'en déduire ?

Exercice 4 — Étudier la convergence simple puis uniforme des suites de fonctions définies par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = nx^n \ln(x) \quad \text{et} \quad \forall x \geq 0, \quad g_n(x) = e^{-nx} \sin(nx)$$

Exercice 5 — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note y_n la solution de l'équation différentielle $(n+1)y'' - (2n+1)y' + ny = 0$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

- Expliciter y_n et étudier la convergence simple de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R} .
- Montrer que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur \mathbb{R}^- .

Exercice 6 — *Second théorème de Dini*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On considère une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions croissantes de $[a, b]$ dans \mathbb{R} qui converge simplement vers une fonction continue f . Soit enfin, pour $p \in \mathbb{N}^*$, la subdivision du segment $[a, b]$ définie par :

$$\forall k \in \{0, \dots, p\}, \quad a_k = a + k \cdot \frac{b-a}{p}$$

- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(a_{k+1}) - f(a_k) \leq \varepsilon$ pour tout entier $k \in \{0, \dots, p-1\}$.
- Montrer que la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur $[a, b]$.
- Application* – Montrer que la suite de fonctions $\left(x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers \exp sur tout segment de \mathbb{R} .

Exercice 7 — Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions α -lipschitzienne sur le segment $[a, b]$ et à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose de plus que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a, b]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Partie B – Séries de fonctions

Exercice 8 — Étudier la convergence simple, puis uniforme de la série de fonctions de terme général u_n dans les cas suivants :

$$u_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}; \quad u_n(x) = \frac{1}{2^n} \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right); \quad u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$$

$$u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right); \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n} \quad (x \geq 0)$$

Exercice 9 — Pour $\alpha > 1$ et $x > 0$, on pose :

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

- Montrer que la fonction η est bien définie et qu'elle est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- Trouver pour $x > 1$ une relation entre $\zeta(x)$ et $\eta(x)$ en calculant $\zeta(x) - \eta(x)$.
- En déduire un équivalent en 1 de $\zeta(x)$.

Exercice 10 — On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par :


$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \text{th}(x+n) - \text{th}(n)$$

- Étudier la convergence de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

On note désormais S la somme de la série.

- Montrer que S est croissante et continue sur \mathbb{R} .
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x+1) - S(x) = 1 - \text{th}(x+1)$.

Exercice 11 — Soit $x \in]-1, 1[$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$. En déduire un développement en série de $\arctan(u)$ pour $u \in]-1, 1[$ et un développement en série de $\frac{\pi}{4}$.

 **Exercice 12** — Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{ikx}$ et $D = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

- Montrer que pour tous $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$, $|S_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$.
- Montrer la convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{inx}}{n}$ pour tout $x \in D$.
- Soit $f_n : x \mapsto \frac{e^{inx}}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0, 2\pi[$.

Exercice 13 — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbb{R}^* telle que $\sum a_n^2$ converge.

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+x}$.

- Montrer que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
- Déterminer la limite en 0 et en $+\infty$ de $f(x)$.

Exercice 14 — Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

- Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 puis de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

- Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$.

- Établir, pour $x > 0$, l'égalité :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

- Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 15 — On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$.

- Montrer que f est correctement définie et continue sur \mathbb{R} .
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer f' . Préciser alors les variations de f .
- Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

Exercice 16 —

- Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$. Étudier la continuité de f et donner un équivalent de $f(x)$ en 0 et en $+\infty$.
- Faire de même avec $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(nx)}$.

Partie C – Convergence dominée et intégration terme à terme

Exercice 17 — Étudier les limites des suites de termes généraux :

$$u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t) dt \quad \text{et} \quad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^2} dt$$

Exercice 18 — On pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^2} dt$.

- Vérifier que le terme u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 19 — Prouver l'existence et calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{\alpha x} - 1} dx$ pour $\alpha > 0$.

Exercice 20 — Justifier l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 21 — Montrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Exercice 22 —

- Justifier l'existence et calculer $a_n = n \int_0^{+\infty} t^n e^{-nt} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que la série de terme général a_n converge.
- En déduire l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{(1-te^{-t})^2} dt$.

Exercice 23 — On pose, pour $x \in]-1, 1[$,

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1 - x \cos(t)}$$

- Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$.
- Montrer que $F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et en déduire un développement de arcsin(x).

Exercice 24 — Justifier l'égalité :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} t^{\sqrt{n}} \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$$

Exercice 25 — Montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha+1}$$

On pourra appliquer le théorème de convergence dominée sur une certaine somme partielle.

Partie D – Approximation uniforme

Exercice 26 — Lemme de Riemann-Lebesgue

- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t) e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t) e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Exercice 27 — Approximation simultanée

- Soient $f, g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$. Montrer qu'alors, pour tout $x_0 \in [a, b]$:

$$\|f - g\|_\infty \leq |f(x_0) - g(x_0)| + (b - a) \|f' - g'\|_\infty$$

- En déduire que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f telle que la suite $(P'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f' .

Exercice 28 — Approximation polynomiale de la racine carrée

On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes définie par $P_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X - P_n^2)$$

- Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est polynomiale et préciser le degré de P_n .
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \geq 0, \quad P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = (P_n(x) - \sqrt{x}) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(P_n(x) + \sqrt{x})\right)$$

- Montrer que tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$.
- En déduire que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$, en décroissant, vers une fonction f à préciser.
- Prouver que la convergence de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f est uniforme.