5 Séries entières

« Un mathématicien qui n'est pas aussi quelque peu poète ne sera jamais un mathématicien complet. »
Extrait d'une lettre de Karl Weierstrass à Sophie Kowalevski (1883)

Plan de cours

Introduction — Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) = y(x) \quad (\mathcal{E})$$

Nous savons que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre sans second membre constitue une droite vectorielle. Les solutions sont donc toutes de la forme $x \mapsto \lambda f(x)$ où f représente une solution non triviale quelconque de cette équation (c'est-à-dire une solution non nulle).

- Recherchons dans un premier temps une solution f sous forme polynomiale. Posons pour cela :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

Inutile cependant d'effectuer le moindre calcul ! L'égalité $f'(x) = f(x)$ montre, pour des questions de degré, que seul le polynôme nul convient.

- Recherchons maintenant [1] des solutions de la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Attention, rien ne dit qu'une telle somme existe, autrement dit que la série associée converge. Supposons pour nos besoins qu'il en est ainsi et permettons-nous même de dériver cette somme terme à terme (terrain glissant !). En injectant le résultat dans l'équation $(\mathcal{E})$, il vient :

$$f'(x) = f(x) \iff \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \iff \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Par raisonnement analogue à celui qu'on a l'habitude d'effectuer sur des polynômes (c'est-à-dire par *identification*), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)a_{n+1} = a_n$$

Ce qui conduit rapidement à $a_n = \dfrac{a_0}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, si toutes les opérations effectuées sont licites, en prenant arbitrairement $a_0 = 1$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

apparaît comme une solution de l'équation $(\mathcal{E})$.

1. Pourquoi diantre se limiter à des sommes finies...

- L'équation $(\mathcal{E})$ n'est cependant pas très mystérieuse, nous savons que ses solutions sont de la forme $x \mapsto \lambda e^x$. Comme la fonction exponentielle est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ qui vérifie la condition initiale $y(0)=1$, on trouve alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Ce premier exemple soulève de nombreuses questions auxquelles nous allons essayer de répondre à travers ce chapitre, à savoir :

- À quelle(s) condition(s) sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sur $x \in \mathbb{K}$ la série $\sum a_n x^n$ converge-t-elle ?
- Peut-on dériver la somme d'une telle série ?
- Peut-on identifier les coefficients ?
- Toute fonction (comme la fonction exponentielle) peut-elle s'écrire comme la somme d'une telle série ?

I | Rayon de convergence d'une série entière

$\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A – Définition et propriétés

Définition 5.1 : Série entière

Une série entière à variable réelle ou complexe z est une série de la forme $\sum a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{K}$.
Les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelés coefficients de la série entière.

La fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est définie en z_0 lorsque la série $\sum a_n z_0^n$ converge.
On l'appelle *fonction somme* ou plus simplement *somme* de la série.

Définition 5.2 : Domaine de convergence

On appelle domaine de convergence l'ensemble de définition de la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Exercice 1

Déterminer le domaine de convergence des deux séries entières suivantes :

$$\sum z^n \, ; \quad \sum \frac{(\pi x)^n}{n^3+2}$$

On remarquera qu'un polynôme est un cas très particulier de série entière.

Lemme 5.3 : Lemme d'Abel

Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration

Supposons z_0 non nul et l'existence un réel M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n z_0^n| \leqslant M$$

Alors, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant |a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \right| \leqslant M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

Comme $|z| < |z_0|$, la série de terme général $\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ est géométrique de raison (en module) strictement inférieur à 1. Ainsi, la série converge, et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. ■

Définition 5.4 : Rayon de convergence

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ l'élément de $R \in \overline{\mathbb{R}}_+$ (c'est-à-dire $R \geqslant 0$ ou $R = +\infty$) défini par :

$$R = \sup\left\{r \geqslant 0 \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$$

D'après le lemme d'Abel, si $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument (donc converge).

Exemples

- $\sum z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.
- $\sum \dfrac{(\pi x)^n}{n^3+2}$ a pour rayon de convergence $R = \dfrac{1}{\pi}$.

Théorème 5.5

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- Si $|z| < R$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$ alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
- Si $|z| = R$ alors on ne peut rien dire.

Démonstration

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Rappelons que par définition,

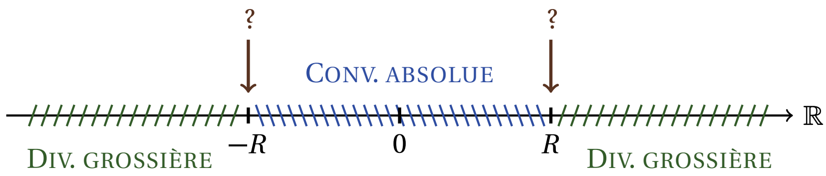
$$R = \sup\left\{r \geqslant 0 \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$.

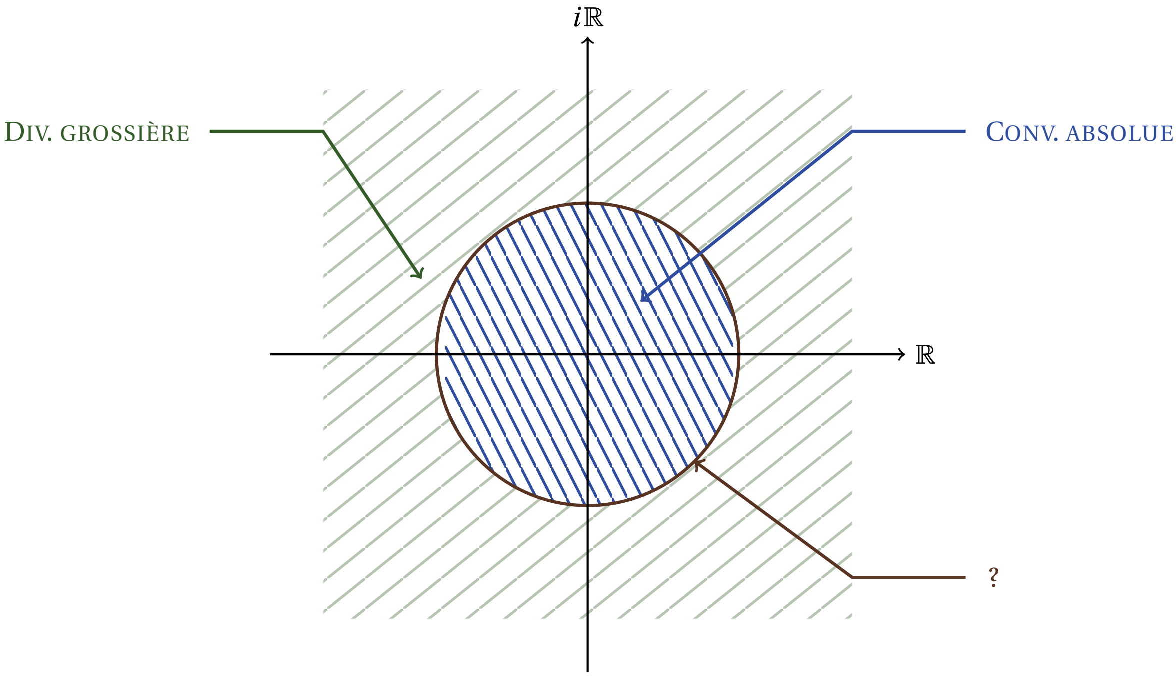
- Si $|z| < R$ alors il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $|z| < r < R$.
  Comme $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, d'après le lemme d'Abel, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- Si $|z| > R$ alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc ne converge pas vers 0.
  Ainsi, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

■

Ce théorème montre que $R = \sup\{r \geqslant 0 \mid \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\}$ et nous donne directement la « forme » du domaine de convergence :



Le domaine de convergence est dans le cas réel un intervalle de la forme $]-R,R[$, $]-R,R]$, $[-R,R[$ ou bien $[-R,R]$.



Le domaine de convergence est dans le cas complexe constitué du disque ouvert de convergence et de points situés sur le cercle de convergence.

Définition 5.6

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $]-R,R[$ est appelé intervalle ouvert de convergence.
- Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $D(0,R)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<R\}$ est appelé disque ouvert de convergence.

Exemple

Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n}$ pour $x\in\mathbb{R}$.

- Si $|x|<1$, $0\leqslant \left|\frac{x^n}{n}\right| \leqslant |x|^n$ donc par comparaison, la série converge absolument.
- Si $|x|>1$, $\left|\frac{x^n}{n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série diverge grossièrement.
- Si $x=1$, on retrouve la série harmonique qui diverge.
- Si $x=-1$, on retrouve la série harmonique alternée qui converge.

B – Détermination pratique du rayon de convergence

1 – Encadrement du rayon de convergence

Si l'on connaît la nature de $\sum a_n z_0^n$ pour un z_0 donné, on peut en déduire des informations sur le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Proposition 5.7 : Encadrement du rayon de convergence

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$.

- Si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $|z_0| \leqslant R$
- Si $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $|z_0| \geqslant R$.
- Si $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente, alors $|z_0| = R$. On est sur le cercle de convergence.

Exemple

On a montré dans le chapitre précédent que $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

On en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{x^n}{n}$ est 1.

2 – Comparaison de séries entières

Proposition 5.8 : Comparaison

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.
On suppose que $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang. Alors, $R_a \geqslant R_b$.

Démonstration

Par comparaison de séries à termes positifs, si $\sum |b_n z^n|$ converge, il en va de même pour $\sum |a_n z^n|$.
Ainsi, si $|z| < R_b$ alors $|z| < R_a$. D'où $R_a \geqslant R_b$. ■

Exercice 2

Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum \sin(n) x^n$?

3 – Séries entières de termes généraux équivalents

Proposition 5.9 : Équivalent

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières telles que $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$.
Alors elles ont même rayon de convergence.

Démonstration

Même principe, on applique la règle des équivalents aux SATP $\sum |a_n z^n|$ et $\sum |b_n z^n|$. ■

Exercice 3

Que vaut le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan(n)\right) x^n$?

4 – Utilisation de la règle de d'Alembert

La règle de d'Alembert relative aux séries numériques à termes strictement positifs nous permet la plupart du temps de déterminer le rayon de convergence d'une série entière. Observons les exemples suivants.

Exemple 1

Considérons la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n}$ et posons $u_n = \dfrac{x^n}{n}$. Pour $x \neq 0$, appliquons la règle de d'Alembert pour étudier la convergence absolue de la série.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n}\right| = \frac{n}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| = \ell$$

- Si $\ell < 1$, c'est-à-dire si $|x| < 1$, alors la série converge absolument.
- Si $\ell > 1$, c'est-à-dire si $|x| > 1$, alors la série ne converge pas absolument.

On a donc immédiatement $R = 1$.

Exemple 2

Considérons la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{2^n}$. Remarquons qu'il s'agit bien d'une série entière. Notons u_n son terme général et étudions pour $x \neq 0$ la convergence absolue de $\sum u_n$ à l'aide de la règle de d'Alembert :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{x^{2n}} = \frac{x^2}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x^2}{2} = \ell$$

- Si $\ell < 1$, c'est-à-dire si $|x| < \sqrt{2}$, alors la série converge absolument.
- Si $\ell > 1$ alors la série ne converge pas absolument.

On en déduit que le rayon de convergence de la série vaut $\sqrt{2}$.
Le lecteur aura bien noté que dans ce cas, l'utilisation de la règle de d'Alembert est totalement farfelue : la série étudiée est une série géométrique de raison $x^2/2$...

5 – Rayon de $\sum n a_n z^n$

Proposition 5.10

Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration

Notons respectivement R et R' les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$.

- Remarquons que si $(n a_n z^n)$ est bornée, il en va de même pour $(a_n z^n)$. Ainsi, $R' \leqslant R$.
- Introduisons maintenant $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Montrons que $|z| < R'$ en considérant un réel r tel que $|z| < r < R$:

$$|n a_n z^n| = \left|a_n r^n \times n\left(\frac{z}{r}\right)^n\right| \leqslant M \times |a_n r^n| \quad \text{car} \quad n\left|\frac{z}{r}\right|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Comme $\sum a_n r^n$ converge absolument, il en va de même pour $\sum n a_n z^n$. Ainsi, $|z| < R'$.

On a bien montré que $R = R'$. ■

On peut aisément généraliser la preuve précédente et montrer que pour tout réel α, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exemple

On retrouve facilement le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$.

Exercice 4

Quel est le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{n^{2018}}$?

C – Opérations sur les séries entières

Proposition 5.11 : Somme de séries entières et multiplication par un scalaire

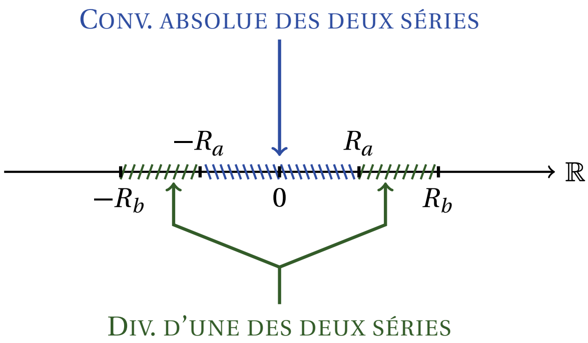
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

(i) $\sum (a_n + b_n) z^n$ est une série entière de rayon de convergence R avec $R = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ ou $R \geqslant R_a$ si $R_a = R_b$.

(ii) $\sum \lambda a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R_a si $\lambda \neq 0$ ou $+\infty$ si $\lambda = 0$.

Démonstration

Démontrons seulement le premier point. Illustrons d'abord le résultat.



- Supposons sans perte de généralité que $R_a < R_b$.
  Pour tout z tel que $|z| < R_a$, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge.
  Ainsi, $R \geqslant R_a$.
  Si $R_a < |z| < R_b$, $\sum a_n z^n$ diverge et $\sum b_n z^n$ converge donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge. Ainsi, $R \leqslant R_a$.
  Finalement, $R = R_a$.
- Supposons que $R_a = R_b$.
  Pour tout z tel que $|z| < R_a$, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge.
  Ainsi, $R \geqslant R_a$.
  Pour $|z| > R_a = R_b$, les deux séries divergent donc on ne peut rien dire sur la somme. ■

Proposition 5.12 : Produit de Cauchy de deux séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.
Alors le produit de Cauchy des deux séries est une série entière de la forme $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et son rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$. De plus, pour $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

Démonstration

- Le produit de Cauchy nous donne bien une série entière :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k}$$

- Si $|z| < \min(R_a, R_b)$ alors les deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes. On en déduit, par produit de Cauchy, que la série $\sum c_n z^n$ est absolument convergente et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

- Ceci prouve bien que $R \geqslant \min(R_a, R_b)$. ■

Exemple

Nous avions vu lors du dernier chapitre que :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} k \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$$

Dans ce cas, le rayon de convergence vaut précisément $1=\min(R_a,R_n)$ mais l'inégalité peut être stricte.

Exercice 5

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$. Notons f la fonction somme associée.

Déterminer une expression de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) z^k$ en fonction de $f(z)$ pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$.

II | Propriétés de la somme d'une série entière d'une variable réelle

On s'intéresse ici uniquement aux séries entières à variable réelle. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R>0$.

Rappelons que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur $]-R,R[$, $]-R,R]$, $[-R,R[$ ou $[-R,R]$.

Que dire de la régularité de f sur son domaine de déf. (*i.e.* sur le domaine de convergence de la série) ?

Exemple

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Déterminons le domaine de définition de f.

D'après la règle de d'Alembert, $R=1$. De plus, $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge donc $D_f=[-1,1[$.

Les démonstrations des théorèmes suivants sont hors programme.

Théorème 5.13 : Continuité

La somme d'une série entière réelle est continue sur l'intervalle ouvert de convergence.

Ce théorème nous garantit donc la continuité de f sur $]-R,R[$. On peut même montrer que la fonction f est continue sur le domaine de convergence de la série mais cette propriété ne figure pas au programme.

Exemple

$f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ est continue sur $]-1,1[$.

Théorème 5.14 : Dérivation terme à terme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R.

On note $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme.

f est dérivable sur $]-R,R[$, $\sum n a_n x^{n-1}$ est une série entière de rayon de convergence R et :

$$\forall x \in]-R,R[,\ f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

- Ce théorème nous permet de calculer très facilement la dérivée de la somme d'une série entière.
- On sait que f est au moins dérivable sur $]-R,R[$ mais on ne peut rien dire en R ou en $-R$ même si f y est définie !

Corollaire 5.15

La somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exemple

Quel est le rayon de convergence et que vaut la somme de $\sum_{n\geqslant 1} n x^n$?

$\forall x \in]-1,1[\ \ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\ \ (R=1)$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Donc, pour tout $x\in]-1,1[$, $x f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Théorème 5.16 : Intégration terme à terme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R.

On note $f : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme et F une primitive de f.

$\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est une série entière de rayon de convergence R et :

$$\forall x\in]-R,R[,\ F(x)=F(0)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Exemple

Calculons la somme de $\sum \frac{x^n}{n}$ pour $x\in[-1,1[$.

$\forall x\in]-1,1[\ \ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

D'où, pour tout $x\in]-1,1[$, $F(x)=-\ln(1-x)=\ln 1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$

Or $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ converge, donc f est définie et continue en -1 et $f(-1)=\lim_{x\to -1^+} -\ln(1-x) = -\ln 2$.

Ne pas oublier la constante d'intégration !

III | Développements en série entière

A – Généralités

Rappelons d'abord des résultats fondamentaux du cours d'analyse de première année.

Théorème 5.17 : Formules de Taylor

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $a,b\in I$.

- Formule de Taylor avec reste intégral

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$$

- Inégalité de Taylor-Lagrange

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| \leqslant M\frac{(b-a)^n}{n!} \qquad \text{avec } M=\sup_{[a,b]}|f^{(n)}|$$

- Formule de Taylor-Young

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\mathrm{o}((b-a)^n)$$

Définition 5.18 : Fonction développable en série entière

Une application est développable en série entière (au voisinage de 0) sur $]-r,r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R avec $R\geqslant r$ telle que :

$$\forall x\in]-r,r[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n.$$

Quelles propriétés doit vérifier une fonction pour être développable en série entière au voisinage de 0 ?

Théorème 5.19 : Condition nécessaire

Si f admet un développement en série entière sur $]-r,r[$ alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$, son développement en série entière est unique et est donné par sa série de Taylor : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Démonstration

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall x\in]-r,r[\ f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$.

- Le fait que f soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ découle du théorème de dérivation terme à terme de la somme d'une série entière. Par récurrence, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$.
- De plus, $f(0)=a_0$, $f'(0)=a_1$, $f''(0)=2a_2$, …, $f^{(n)}(0)=n!a_n$. ■

Exercice 6

Montrer que si $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ alors $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k x^k+\mathrm{o}(x^n)$.

La réciproque du théorème est fausse : toute fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ n'est pas développable en série entière.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-1/x^2} \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ puis prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)=0$. Conclure.

INDICATION : *On pourra montrer que pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}$.*

Corollaire 5.20 : Unicité du développement en série entière

Soit $r>0$ quelconque.

Si pour tout $x\in]-r,r[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n$ alors on a : $\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=b_n$

Les propriétés suivantes peuvent s'avérer utiles :

- Si f est paire, f' est impaire.
- Si f est paire (resp. impaire), son développement en série entière ne contiendra que des puissances paires (resp. impaires).

B – Développements en série entière usuels

1 – Fonction exponentielle

- Commençons par montrer que $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \sup_{[0,x]} |f^{(n+1)}| \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 1$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \max(\mathrm{e}^0, \mathrm{e}^x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc pour tout réel x, $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

On aurait aussi pu utiliser le fait que exp est l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

On peut alors déterminer les déveleppoments en série entière des fonctions ch et sh.

- Qu'en est-il de l'exponentielle complexe ?

D'après le cours de 1ère année, $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On admet que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Proposition 5.21

Pour tous nombres complexes z et z',

$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{z'}$$

Démonstration

Considérons le produit de Cauchy des deux séries $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{n!}$ qui ont toutes les deux pour rayon de convergence $+\infty$. La série entière produit est donc absolument convergente pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et on a :

$$\begin{aligned}
\exp(z) \cdot \exp(z') &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k z'^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \exp(z+z')
\end{aligned}$$

■

On peut alors déterminer les développements en série entière des fonctions cos et sin.

2 – Autres développements usuels

Voici la liste des développements usuels à connaître par cœur :

$R=+\infty$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{e}^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$
$R=+\infty$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$R=+\infty$	$\mathbb{R}$	$\cos x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$R=+\infty$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$R=+\infty$	$\mathbb{R}$	$\sin x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$R=1$	$]-1,1[$	$(1+x)^\alpha=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \quad (\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})$
$R=1$	$]-1,1[$	$\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$
$R=1$	$]-1,1]$	$\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$
$R=+\infty$	$\mathbb{C}$	$\mathrm{e}^z=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$

De toute la liste, il ne reste qu'à déterminer le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$.

Exemple

Soit $f: x\mapsto(1+x)^\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$. Déterminer son développement en série entière.
$\forall x>-1,\ f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$. f est donc solution de l'équation différentielle $(1+x)y'=\alpha y$.
C'est même l'unique solution de l'équation vérifiant la condition initiale $y(0)=1$ par unicité au problème de Cauchy.

Soit y une solution de l'équation développable en série entière. On a $y(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$.

En injectant dans l'équation on trouve pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=\dfrac{\alpha-n}{n+1}a_n$.
Si $\alpha\in\mathbb{N}$, les a_n sont tous nuls à partir d'un certain rang. $\rightsquigarrow R=+\infty$.
Supposons maintenant que $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$.
Une simple récurrence nous fournit : $a_n=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour $a_0=1$, y est solution de l'équation et vérifie $y(0)=1$. Par unicité, $y=f$.
On a obtenu le développement en série entière souhaité. Il reste maintenant à déterminer le rayon de convergence de la série entière à l'aide de la règle de d'Alembert : $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\dfrac{\alpha-n}{n+1}\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.
Donc $R=1$.

Exercice 8

Déterminer le développement en série entière de la fonction arctan.

C – Méthode pratique pour obtenir un développement en série entière

❶ Utilisation des développements usuels et des opérations sur les séries entières (somme et produit).

Exemple

Déterminer le développement en série entière de $f: x\mapsto x\ln(1-x)+2\mathrm{e}^x$.

$$f(x)=2+2x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{2}{n!}\right)x^n.$$

❷ Dérivation et intégration terme à terme.

Exemple

$x \mapsto \ln(1-x)$.

❸ Utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exemple

$x \mapsto \exp(x)$.

❹ Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

$$\forall x \in]-a, a[, \qquad \frac{1}{x-a} = \frac{-1}{a}\frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{-1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n$$
$$\frac{1}{(x-a)^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x-a}\right) = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}$$

Exemple

Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-5x+6}$.

$\dfrac{1}{x^2-5x+6} = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$.

❺ Utilisation d'une équation différentielle.

Exemple

Soit $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2/2}\,\mathrm{d}t$. Déterminer son développement en série entière.

g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle $y' = 1 - xy$. En cherchant une solution sous forme de série entière, on trouve une relation liant les coefficients a_n de la série :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; a_{n+1}(n+1) + a_{n-1} = 0 \text{ et } a_1 = 1$$

Par unicité de la solution au problème de Cauchy, en prenant $a_0 = 0$, on trouve $a_{2n} = 0$ et :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?