4 Suites et séries numériques

« Une idée qui ne peut servir qu'une seule fois est une astuce.
Sinon, elle devient une méthode. »
G. Polya

Plan de cours

I | Suites numériques

A – Suites classiques

1 – Suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$

Il s'agit d'une suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 – Suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$

Il s'agit d'une suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \\ u_{n+1} = q\,u_n \end{cases}$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1. \text{ Si } q = 1, \sum_{k=0}^{n} q^k = n+1.$$

De manière plus générale,

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \cdot \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \text{ pour } q \neq 1$$

Exemple

Une grenouille essaie d'atteindre une mare située à 2 mètres d'elle. Elle fait un premier bond de 1 mètre mais comme elle s'épuise, son deuxième saut ne la porte qu'à la moitié de la distance précédente. Et ainsi de suite... La grenouille atteindra-t-elle un jour la mare ?

La réponse est malheusement non. En effet, notons S_n la distance parcourue au bout du n–ième saut.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2$$

3 – Suite arithmético-géométrique

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = a\,u_n + b \quad (a \neq 1) \end{cases}$$

(a) On recherche le point fixe de la suite noté ℓ.
$\ell = a\ell + b$ donc $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

(b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a.
En effet, quel que soit l'entier naturel n, $u_{n+1} - \ell = a\,u_n + b - (a\ell + b) = a(u_n - \ell)$.
D'où $v_n = a^n\, v_0 = a^n(u_0 - \ell)$.

(c) On a donc $u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
Expliciter u_n en fonction de n.

4 – Suite récurrente linéaire d'ordre 2

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n \end{cases}$$

On résout l'équation caractéritique $X^2 - aX - b = 0$ de discriminant associé Δ.

1. Si $\Delta > 0$ alors on obtient deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.
   $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
2. Si $\Delta = 0$ alors on obtient une racine double r.
   $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + n\mu) r^n$.
3. Si $\Delta < 0$ alors on obtient deux racines complexes conjuguées $\rho \mathrm{e}^{\pm i\theta}$.
   $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \rho^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$$

Déterminer u_n en fonction de n.

Deux suites sont égales si et seulement si elles vérifient la même relation de récurrence et ont même(s) condition(s) initiale(s).

B – Convergence des suites numériques

1 – Borne supérieure

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite majorée s'il existe M appelé majorant tel que :

$$\forall x \in A \quad x \leqslant M$$

On appelle borne supérieure de A le plus petit des majorants lorsque celui-ci existe.

Théorème 4.1 : Théorème de la borne supérieure

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Exemple

L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$.

2 – Convergence d'une suite

Définition 4.2

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On dit qu'elle diverge vers $+\infty$ si,

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow u_n > A$$

Exercice 3

Trouver la limite (en revenant à la définition) de $\dfrac{3n}{n^3+1}$ et $\dfrac{n^3 - \sin(n)}{n - 2\sqrt{n} + 1}$.

Proposition 4.3 : Unicité de la limite

La limite d'une suite lorsqu'elle existe est unique.

Une suite convergente est nécessairement bornée mais attention, la réciproque est fausse : penser par exemple à $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

3 – Comment prouver qu'une suite converge/diverge ?

Théorème 4.4 : Théorèmes de comparaison

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

(a) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même réel ℓ, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ;

(b) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$;

(c) si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Théorème 4.5 : Théorème de la limite monotone

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe. De plus,

- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ ;
- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Théorème 4.6 : Suites adjacentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.
2. $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Théorème 4.7 : Suites extraites

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors toute suite extraite (du type $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) converge vers ℓ.

On peut ainsi montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en montrant que les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ou convergent vers des limites distinctes.

C – Relations de comparaison

Définition 4.8 : Équivalence, négligeabilité et domination

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques où $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On dit que :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$. Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\dfrac{u_n}{v_n}$ est bornée. Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite ℓ. De plus, si deux suites sont équivalentes, les termes généraux sont de même signe à partir d'un certain rang.

Rappelons les résultats classiques dits de « croissances comparées » pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln^\alpha(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^\beta); \quad n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^{\beta n}) \text{ et même pour } x > 1,\ n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^{\beta n})$$

Théorème 4.9 : Lien entre équivalence et négligeabilité

Pour deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + \mathrm{o}(v_n)$$

Cette propriété justifie à elle seule que l'on peut obtenir un équivalent à l'aide du premier terme non nul d'un développement limité. Voici pour mémoire les développements limités usuels à connaître.

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{ch}\, x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$\mathrm{sh}\, x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Exercice 4

Déterminer la limite ℓ en $+\infty$ de $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ puis donner un équivalent de $u_n - \ell$.

II | Généralités sur les séries numériques

A – Définitions et premières propriétés

Définition 4.10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- On appelle somme partielle au rang n le terme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
- On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On la note $\sum u_n$.
- Lorsque la suite (S_n) converge, on dit que la série de terme général u_n converge et on appelle *somme de la série* la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  Notation : $S = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Lorsqu'elle converge, on appelle reste au rang n la différence

$$R_n = S - S_n = \sum_{k>n} u_k \text{ où } S = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Lorsqu'une série ne converge pas, on dit qu'elle diverge. On remarquera que :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On ne modifie pas la nature d'une série en modifiant ses premiers termes.

Proposition 4.11 : Opérations sur les séries

Soit deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ qui convergent respectivement vers S et S' et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

- $\sum (u_n + v_n)$ converge vers $S + S'$.
- $\sum \lambda u_n$ converge vers λS.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire de la nature de $\sum (u_n + v_n)$.

Proposition 4.12

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.

Démonstration

On note S_n la somme partielle de la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$.

$S_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)=\cdots=u_n-u_0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. ■

B – Divergence grossière

Théorème 4.13 : Condition nécessaire de convergence

Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration

On suppose que $\sum u_n$ converge et on note S sa somme.

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad S_n-S_{n-1}=\sum_{k=0}^{n}u_k-\sum_{k=0}^{n-1}u_k=u_n$$

$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ et $S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S-S=0$. ■

Par contraposée, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, la série diverge (de manière grossière).
Attention, la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la série harmonique $\sum\frac{1}{n}$ que nous étudierons peu après.

C – Calcul direct

On peut dans certains cas (assez rares) calculer la somme partielle au rang n avant de conclure en passant à la limite.

Théorème 4.14 : Série géométrique

$\sum x^n$ converge si et seulement si $|x|<1$. Dans ce cas, sa somme vaut $\dfrac{1}{1-x}$.

Démonstration

Pour $x\neq 1$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}x^k=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Cette quantité admet une limite finie si et seulement si $|x|<1$.

Pour $x=1$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}1=n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série diverge. ■

On peut également prouver la convergence de séries à l'aide de sommes télescopiques.

Exemple

Montrer que la série $\sum\dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et déterminer sa somme.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

Exercice 5

❶ Montrer que : $\forall x, y \in]0, +\infty[$ $\arctan x - \arctan y = \arctan \dfrac{x-y}{1+xy}$

❷ Montrer que pour tout entier n, $n^4+n^2+1 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$.

❸ En déduire la nature de la série $\sum \arctan \dfrac{2n}{n^4+n^2+2}$.

III | Séries à termes positifs

Une série de terme général u_n est dite à termes positifs si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

Théorème 4.15

On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes positifs.
Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors la série converge. Sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Démonstration

On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes positifs au moins à partir d'un certain rang. Par définition, $\sum u_n$ converge ssi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Or, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. En effet, $S_n - S_{n-1} = u_n \geqslant 0$. Si elle est majorée, elle converge. Si elle ne l'est pas, elle diverge vers $+\infty$. ■

Exemple – Divergence de la série harmonique (1)

Montrons que la série $\sum \frac{1}{n}$, dite *série harmonique*, diverge.

Posons pour cela $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On peut constater que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Si la série convergeait, en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtiendrait $0 \geqslant 1/2$, absurde ! Donc la série harmonique diverge, et même vers $+\infty$ puisqu'il s'agit d'une série est à termes positifs.

A – Comparaison de deux séries à termes positifs

Théorème 4.16 : Comparaison

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration

On ne change pas la nature d'une série en changeant ses premiers termes.
Supposons donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Supposons que $\sum v_n$ converge vers S'.

$\forall n \geqslant 0$, $S_n \leqslant S'_n$. De plus, $\left(S'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par S'. Donc,

$$\forall n \geqslant 0 \quad 0 \leqslant S_n \leqslant S'.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée donc la série à termes positifs $\sum u_n$ converge. ■

Corollaire 4.17

Sous les mêmes hypothèses, $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge.

Il existe un théorème analogue lorsque les séries sont à termes négatifs.

Exemple

Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{(2n+2)3^n}$ converge.
$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \dfrac{1}{(2n+2)3^n} \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ et $\left|\dfrac{1}{3}\right| < 1$.

Ne pas oublier de vérifier que $u_n \geqslant 0$!

Exercice 6

Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n2^n}$.

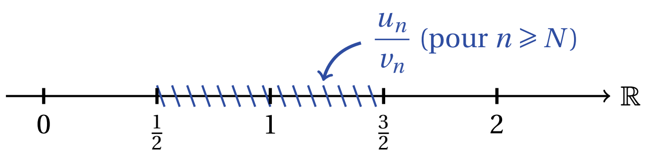
B – Règle des équivalents

Théorème 4.18 : Équivalents

On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes positifs.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.



Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad \frac{1}{2} v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2} v_n$$

Par comparaison, $\sum v_n$ CV $\Longrightarrow \sum \frac{3}{2} v_n$ CV $\Longrightarrow \sum u_n$ CV. De plus, $\sum u_n$ CV $\Longrightarrow \sum \frac{1}{2} v_n \Longrightarrow \sum v_n$. ■

Exercice 7

Quelle est la nature de $\sum \dfrac{1}{2^n - 1}$?

Exemple – Divergence de la série harmonique (2)

Déterminer la nature de $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ puis en déduire celle de $\sum \dfrac{1}{n}$.
Remarquons tout d'abord que :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \big[\ln(k+1) - \ln(k)\big] = \ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

D'où la divergence de la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.
$\forall n \in \mathbb{N}, 1+\dfrac{1}{n} \geqslant 1$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \geqslant 0$. De plus, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc ces deux séries à termes positifs sont de même nature et divergent.

Exercice 8

Montrer à l'aide de la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Exemple

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en justifiant que la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge.
Pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Comme $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$, $u_n - u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}$.
La convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ nous assure d'après le théorème précédent, la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Cette limite est notée γ et est appelée constante d'Euler. On a montré que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

C – Règle de d'Alembert ($\star$)

Théorème 4.19 : Règle de d'Alembert

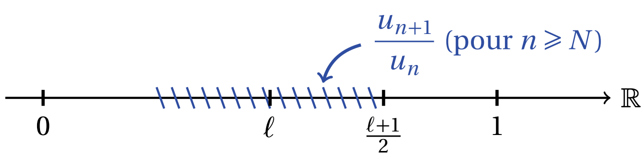
On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes *strictement positifs* à partir d'un certain rang et que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0, +\infty]$$

- Si $\ell < 1$, la série converge.
- Si $\ell > 1$, la série diverge (grossièrement).
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire. (cas douteux)

Démonstration

- Si $\ell > 1$, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ donc la suite à termes positifs (u_n) est strictement croissante. Elle ne peut donc converger vers 0 et $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell < 1$, on utilise une comparaison avec une série géométrique.
  À partir d'un certain rang N, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{\ell+1}{2}$ (revenir pour cela à la définition de la limite et choisir le bon ε).



  Comme $u_n > 0$, $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{\ell+1}{2}\right) u_n \leqslant \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^2 u_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-N} u_N$.
  Le dernier terme est le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{\ell+1}{2} < 1$ donc par comparaison, la série converge. ■

Cette règle est très pratique lorsqu'on travaille avec des séries dont le terme général fait intervenir x^n ou $n!$. Attention cependant aux cas douteux.

Exemple (cas intéressant)

> Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n!}$.
> Il s'agit d'une série à termes strictements positifs, on applique la règle de d'Alembert à $u_n = \frac{1}{n!}$.
> $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$. Donc la série converge. On peut même démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

Exemples (cas douteux)

> Considérer les deux séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$.

D – Comparaison séries/intégrales

Commençons par l'étude d'un exemple assez classique.

Exemple – Divergence de la série harmonique (3)

> Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Remarquons que pour tout réel $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$.
> Donc par croissance de l'intégrale,
>
> $$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{puis, en sommant, } \ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
>
> Donc par comparaison, $\sum \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$.

Essayons maintenant de généraliser cette technique d'encadrement. Pour cela, nous aurons besoin, contrairement à l'an dernier, d'intégrer des fonctions sur des intervalles non bornés, du type $[a, +\infty[$.

Définition 4.20 : Intégrale impropre

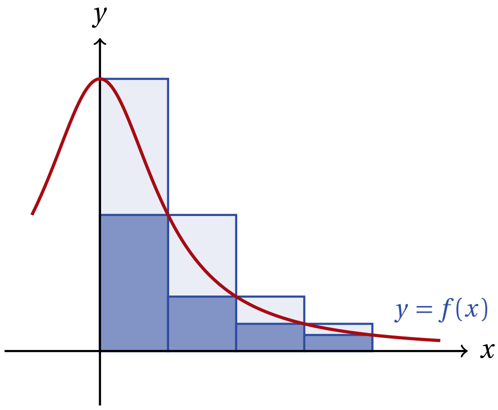
Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Si $\int_a^x f$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale impropre converge et on note $\int_a^{+\infty} f$ cette limite. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Théorème 4.21 : Comparaison séries/intégrales

Soit f une application continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$.
Alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Démonstration

Démontrons ce résultat pour $a=0$. Tout repose sur le dessin suivant :



Soient $k\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $t\in[k,k+1]$, $f(k+1)\leqslant f(t)\leqslant f(k)$ donc :

$$f(k+1)=\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t = f(k)$$

On somme ces inégalités en appliquant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)=\sum_{k=1}^{n} f(k)$ puis on conclut par comparaison. ■

Chacune des hypothèses du théorème précédent est essentielle!

Une application directe de ce théorème nous donne de nouvelles séries de référence.

Lemme 4.22

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

Démonstration

- $t\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1,+\infty[$.
- Par ailleurs, si $\alpha\neq 1$,

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_1^x t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha>1 \\ +\infty & \text{si } \alpha<1 \end{cases}$$

Si $\alpha=1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et donc :

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha>1$$

■

Théorème 4.23 : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

Remarquons que pour $\alpha \leqslant 0$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Supposons maintenant $\alpha > 0$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, continue et positive sur $[1, +\infty[$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature. La série converge donc ssi $\alpha > 1$. ■

IV | Séries absolument convergentes

A – Convergence absolue

Définition 4.24 : Convergence absolue

On dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 4.25

Une série absolument convergente est convergente.

Démonstration

Non exigible.

- *Cas des suites à termes réels*

  Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-|u_n| \leqslant u_n \leqslant |u_n|$ donc :

  $$0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$$

  Par comparaison de séries à termes positifs,

  $$\sum |u_n| \text{ converge } \Longrightarrow \sum (u_n + |u_n|) \text{ converge } \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

- *Cas des suites à termes complexes*

  On remarque que :

  $$\begin{cases} 0 \leqslant |\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n| \\ 0 \leqslant |\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n| \end{cases}$$

  $$\begin{aligned} \sum |u_n| \text{ converge} &\Longrightarrow \sum |\mathrm{Re}(u_n)| \text{ et } \sum |\mathrm{Im}(u_n)| \text{ convergent (séries réelles)} \\ &\Longrightarrow \sum \mathrm{Re}(u_n) \text{ et } \sum \mathrm{Im}(u_n) \text{ convergent} \\ &\Longrightarrow \sum u_n \text{ converge} \end{aligned}$$

■

La réciproque est fausse. On appelle série semi-convergente une série convergente qui n'est pas absolument convergente. Nous en verrons un exemple en fin de chapitre.

Proposition 4.26 : Inégalité triangulaire

Si la série de terme général u_n converge absolument, alors :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration

Supposons que la série de terme général u_n converge absolument. Remarquons tout d'abord que l'inégalité précédente a un sens : les deux séries $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ convergent. Par inégalité triangulaire,

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n|$$

Il n'y a plus qu'à passer à la limite ! ■

B – Théorèmes de comparaison (⋆)

Théorème 4.27 : Règle du « grand O »

Soient $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à termes positifs.
Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge (absolument).

Le résultat précédent est encore valable dans le cas où $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.

Démonstration

Il existe $K \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geqslant N \quad |u_n| \leqslant K\, v_n$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge absolument donc converge. ■

Corollaire 4.28

Si $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

Exercice 9

Déterminer la nature des séries :

$$\sum \mathrm{e}^{-n^2} \; ; \quad \sum \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \; ; \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$$

C – Produit de Cauchy (⋆)

Considérons deux séries convergentes $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Peut-on écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \; ?$$

La réponse est sans appel, NON ! Pour s'en convaincre, il suffit de constater que :

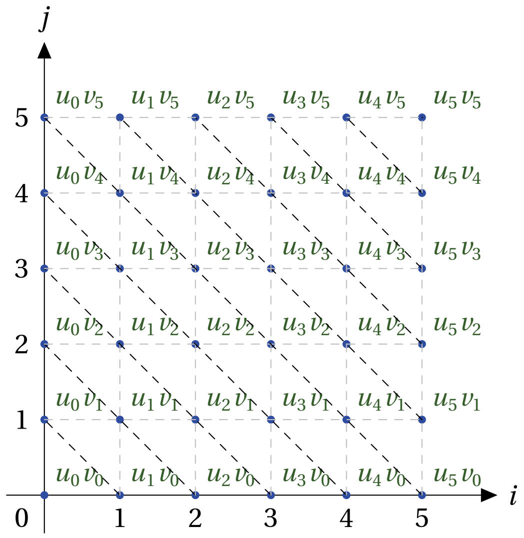
$$(u_0 + u_1)(v_0 + v_1) \neq u_0 v_0 + u_1 v_1$$

Exemple

> Considérons, en guise de deuxième contre-exemple, deux séries de terme général $\dfrac{1}{2^n}$.
>
> $$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=4;\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\neq 4$$

Mais alors, comment calculer le produit de deux séries, ou plutôt de la somme de deux séries ? Regardons d'abord ce qu'il se passe dans le cas de deux sommes finies.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{n}u_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n}v_j\right)&=\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}u_i v_j=(u_0+u_1+\cdots+u_n)\cdot(v_0+v_1+\cdots+v_n)\\&=u_0\cdot(v_0+\cdots+v_n)+\cdots+u_n\cdot(v_0+\cdots+v_n)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}u_i v_j\ \text{(sommation verticale)}\\&=(u_0+\cdots+u_n)\cdot v_0+\cdots+(u_0+\cdots+u_n)\cdot v_n=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}u_i v_j\ \text{(sommation horizontale)}\\&\neq u_0v_0+u_1v_1+\cdots+u_nv_n\end{aligned}$$



Différentes façons de sommer les termes

Mais on peut aussi choisir de sommer les termes le long des diagonales :

$$\left(\sum_{i=0}^{n}u_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n}v_j\right)=(u_0v_0)+(u_0v_1+u_1v_0)+\cdots+(u_{n-1}v_n+u_nv_{n-1})+(u_nv_n)=\sum_{k=0}^{2n}\sum_{\substack{i+j=k\\0\leqslant i,j\leqslant n}}u_iv_j$$

Cela nous conduit à la définition suivante :

Définition 4.29 : Produit de Cauchy

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série de terme général w_n défini par $w_n=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}u_iv_{n-i}$.

Théorème 4.30 : Produit de Cauchy

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument alors leur produit de Cauchy converge (absolument) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Démonstration

Conformément au programme, la preuve n'est pas exigible. Nous démontrerons le résultat uniquement dans le cas de séries à termes positifs.

- Posons $A_n = [\![0, n]\!] \times [\![0, n]\!]$ et $B_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = k \text{ avec } 0 \leqslant k \leqslant n\}$.
- Remarquons tout d'abord que $B_n \subset A_n \subset B_{2n}$.
  On peut facilement le constater en adaptant le schéma précédent.
- Comme les séries considérées sont à termes positifs,

$$\sum_{(i,j)\in B_n} u_i v_j \leqslant \sum_{(i,j)\in A_n} u_i v_j \leqslant \sum_{(i,j)\in B_{2n}} u_i v_j$$

  Ce qui se traduit par :

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} w_k \leqslant \sum_{i=0}^{n} u_i \cdot \sum_{j=0}^{n} v_j \leqslant \sum_{k=0}^{2n} w_k$$

- Il n'y a plus qu'à conclure en faisant tendre n vers $+\infty$, la convergence des séries étant assurée par la règle de comparaison sur les séries à termes positifs.

Nous admettons le résultat dans le cas plus général des séries absolument convergentes. ■

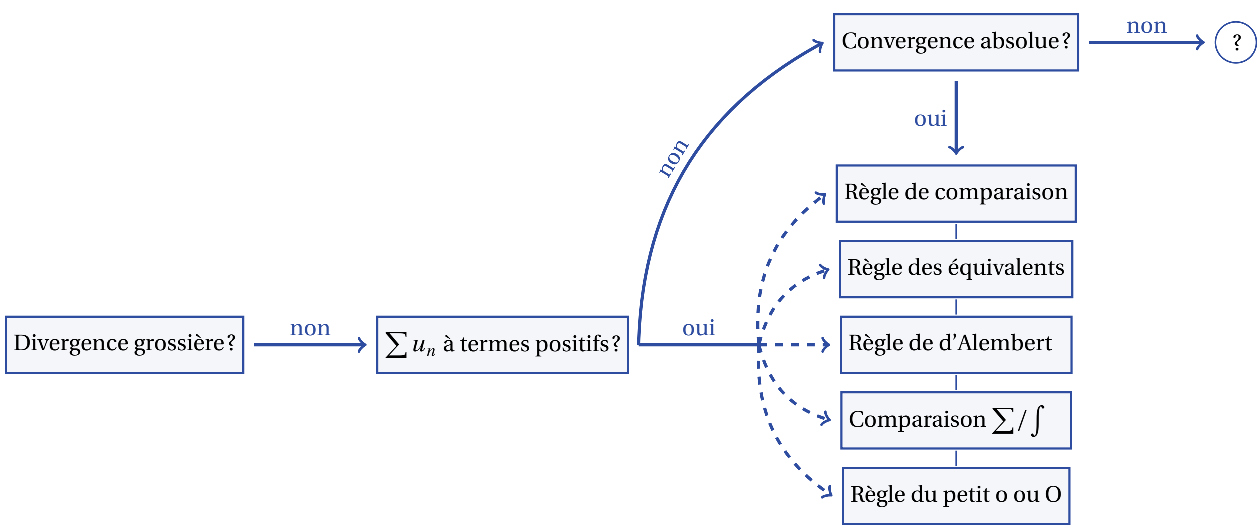
Exemple

Considérons maintenant de nouveau une série géométrique de raison $q \in]-1;1[$, donc une série absolument convergente. D'après ce qui précède,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k q^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n$$

Ce résultat vous étonne-t-il ?

V | Synthèse



VI | Représentation décimale d'un nombre réel (⋆)

Définition 4.31 : Développement décimal d'un réel

On appelle développement décimal d'un réel x, toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $a_0 \in \mathbb{Z}$;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$;
- $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$.

La définition précédente permet de donner un sens à l'écriture $x = a_0, a_1a_2a_3a_4\cdots$ qu'il convient d'employer avec grande modération.

Une telle représentation de x n'est néanmoins pas unique. En effet, $x = 1,00\overline{0}$ et $y = 0,99\overline{9}$ représentent le même réel :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x-y| \leqslant 10^{-n}$$

Une autre façon de voir les choses :

$$0,99\overline{9} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

Définition 4.32 : Développement décimal propre

On dit qu'une développement décimal d'un réel x est propre si la suite a_n n'est pas stationnaire en 9, c'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \geqslant n$ tel que $a_m \neq 9$.

Proposition 4.33 : Unicité de la représentation décimale propre

Tout réel admet un et un seul développement décimal propre.

Démonstration

Nous admettons le résultat. On peut même démontrer que tout réel x peut être représenté par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_0 = \lfloor x \rfloor; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10\lfloor 10^n x \rfloor$$

■

Un nombre réel admet un développement décimal propre fini (tout du moins stationnaire en 0) si et seulement s'il s'agit d'un nombre décimal.

Définition 4.34 : Approximation décimale par défaut et par excès

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une représentation décimale propre d'un réel x. Alors $\xi_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$ est appelé approximation décimale par défaut à 10^{-n} près de x et $\xi_n + \frac{1}{10^n}$ est appelé approximation décimale par excès à 10^{-n} près de x.

Proposition 4.35

Un réel x est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Ceci explique bien des résultats obtenus à la calculatrice... On ne dira pas pour autant que $0,3333333 = \frac{1}{3}$!

VII | Complément sur les séries alternées (⋆)

Définition 4.36

On appelle série alternée une série de la forme $\sum(-1)^n \alpha_n$ où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Théorème 4.37 : Théorème spécial des séries alternées

Soit $\sum(-1)^n \alpha_n$ une série alternée avec :

(i) $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de signe positif ; (ii) $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante ; (iii) $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors la série $\sum(-1)^n \alpha_n$ converge et $|R_n| = |S - S_n| \leqslant |\alpha_{n+1}|$.

Le résultat précédent est encore vrai lorsqu'on suppose $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ négative, croissante et de limite nulle.

Démonstration

Étudions la convergence de $\sum u_n$ avec $u_n = (-1)^n \alpha_n$ où l'on suppose de plus que (α_n) est positive, décroissante et de limite nulle.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha^k$. Montrons que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

- $S_{2n+2} - S_{2n} = \alpha_{2n+2} - \alpha_{2n+1} \leqslant 0$
- $S_{2n+3} - S_{2n+1} = \alpha_{2n+2} - \alpha_{2n+3} \geqslant 0$
- $S_{2n+1} - S_{2n} = -\alpha_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite S. Ainsi, $\sum u_n$ converge vers S.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^* S_{2n-1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$. D'où, $0 \leqslant S - S_{2n-1} \leqslant S_{2n} - S_{2n-1} = \alpha_{2n} = |u_{2n}|$.
On a donc $|R_{2n-1}| \leqslant u_{2n}$. De même, on montre que $|R_{2n}| \leqslant u_{2n+1}$. ■

Exemple (série harmonique alternée)

Il s'agit de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. Cette série ne converge pas absolument mais d'après le théorème précédent, elle converge. On peut de plus montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$. En effet,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k + \frac{(-x)^n}{1+x}$$

Donc par croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2 &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k \,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} + \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

De plus, $\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, car $\left|\frac{(-x)^n}{1+x}\right| \leqslant x^n$ donc par croissance de l'intégrale :

$$\left|\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(-x)^n}{1+x}\right| \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, en passant à la limite,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=-\ln(2)$$

On sait même, en utilisant les notations précédentes, que $R_6=-\ln(2)-S_6\leqslant\frac{1}{7}$; ce qui signifie que $S_6=\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{(-1)^k}{k}$ est une approximation de $-\ln(2)$ à $1/7$ près.

Exercice 10

Déterminer la nature de $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ en fonction du paramètre $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 11

Pour quelles valeurs de α la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge-t-elle ?

VIII | Où l'on s'interroge sur l'ordre de sommation... ($\star$)

Tout comme la partie précédente, ce qui suit n'est pas au programme mais son contenu permettra de sensibiliser le lecteur à l'ordre de sommation et d'expliquer certaines remarques qui seront faites lors du cours de Probabilités.

La notion de somme infinie nous a confrontés à un problème de taille, à savoir la convergence des séries étudiées. Nous avons vu, par exemple, que :

- la série $\sum(-1)^n$ diverge grossièrement ;
- la série $\sum\frac{1}{n^3}$ convege (absolument) ;
- la série $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

Mais nous étions amenés à ne sommer que des termes préalablement ordonnés. En effet, nous n'avons considéré que des séries de terme général u_n, ce qui impose un certain ordre de sommation :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0+u_1+\cdots+u_n$$

Que se passe-t-il si l'on permute deux termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? À vrai dire, pas grand chose ! On ne change ni la nature de la série, ni sa somme en cas de convergence. Si cette permutation concernait toutefois une infinité de termes, on ne pourrait pas en dire autant comme le montre l'exemple suivant.

Exemple

- Nous avons établi que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln(2)$.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\cdots=\ln(2)$$

- En réarrangeant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)+\cdots\\=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)+\cdots\\=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\cdots\right)=\frac{\ln(2)}{2}\end{aligned}$$

Nous voyons ainsi qu'il s'agit de prendre les plus grandes précautions lorsque l'on cherche à modifier l'ordre de sommation. Nous admettons le résultat suivant.

Théorème 4.38

Si $\sum u_n$ est absolument convergente et converge vers un réel S, alors, pour tout bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sum u_{\varphi(n)}$ converge absolument vers le même réel S.

La convergence absolue nous garantit donc que la somme obtenue ne dépend pas de l'ordre de sommation.

La notion de famille sommable vise à étendre les calculs de sommes d'un nombre infini de termes à un cadre plus général que celui des séries, c'est-à-dire sans qu'il soit nécessaire de les ordonner au préalable. Mais cette notion ne figure pas au programme de la filière PT.