

Suites et séries numériques

Travaux dirigés #01

Partie A – Suites numériques

Exercice 1 — Prouver la convergence et trouver la limite des suites définies par :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]; \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}; \quad w_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}^{-1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Exercice 2 — Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de :

$$u_n = \frac{1}{2i} \left[\left(1 + i \frac{t}{n}\right)^n - \left(1 - i \frac{t}{n}\right)^n \right]$$

Exercice 3 — Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes :

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n; \quad e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1} \cdot \pi\right); \quad \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$$

Exercice 4 — On pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$.

Étudier $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et calculer $P = \prod_{k=1}^{+\infty} u_k$. On pourra écrire, en justifiant, $u_n = \cos(\theta_n)$.

Exercice 5 — On suppose qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$$

On définit alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant pour tout entier n , $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 6 — Étudier les trois suites récurrentes suivantes :

$$\begin{cases} u_0 \in]-1, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 \in [0, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{3}{1+3v_n} \end{cases} \quad \begin{cases} w_0 = 1/2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 1 - w_n^2 \end{cases}$$

Exercice 7 — Variations autour du lemme de Cesàro

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ puis que $\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

a) On suppose que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$. Montrer que $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

b) En déduire que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$, alors $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Exercice 8 — On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{u_n^2}{2}} \end{cases}$$

1. Prouver la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note α sa limite.
2. Écrire une fonction Python permettant d'afficher les 15 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer un majorant de $|u_n - \alpha|$ dépendant de n . Comment calculer α à 10^{-4} près ?
4. Écrire une fonction Python permettant d'obtenir une telle approximation.

Exercice 9 — On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, \pi[\\ u_{n+1} = \sin(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
2. Montrer que :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u_n^2} + \frac{1}{3} + o(1)$$

3. En déduire $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

On pourra employer un théorème de sommation ou le lemme de Cesàro.

Exercice 10 — Déterminer un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^3}$ de la suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}}{n+1}$$

Exercice 11 — Suite définie implicitement (1)

1. Pour tout $n \geq 3$, montrer que l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ admet une unique racine dans $]0, 1[$ (notée x_n) et une unique racine dans $]1, +\infty[$ (notée y_n).
2. Donner un équivalent de x_n .
3. Donner la limite ℓ de y_n ainsi qu'un équivalent de $y_n - \ell$.

Exercice 12 — Suite définie implicitement (2)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sin(x) = \frac{1}{x}$ admet une unique solution notée u_n dans $\left[2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$. On pose alors $x_n = u_n - 2n\pi$.
2. Justifier la convergence de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ puis trouver un équivalent.

Exercice 13 — On pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

Donner un développement asymptotique de I_n à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Partie B – Séries numériques

Exercice 14 — Divergence de $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

1. Montrer pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ la double inégalité suivante :

$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$$

2. En déduire les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$$

Exercice 15 — Étudier la convergence des séries proposées en précisant la limite de la suite des sommes partielles.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+2)}; \quad \sum_{n \geq 3} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}; \quad \sum_{n \geq 0} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

Exercice 16 —

1. Établir la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} (n - (-1)^n)3^{-n}$.
2. a) Justifier la convergence et calculer, à l'aide d'une intégrale, la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
b) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\frac{1}{x^3+1} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2-x+1}$.
En déduire la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 17 —

1. On considère la série de terme général $u_n = \sin((2 - \sqrt{3})^n \pi)$. Montrer qu'elle est à termes positifs puis étudier sa convergence.
2. On pose $A_n = (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n$. Montrer que A_n est un entier pair.
3. En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \sin((2 + \sqrt{3})^n \pi)$.

Exercice 18 — Étudier la nature de la série dont le terme général est le suivant :

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \quad b_n = \frac{e^n}{n!} \quad c_n = e^{-\sqrt{\ln(n)}}$$

$$d_n = \frac{1}{n}(2 - \sqrt{3})^n \quad e_n = \arccos\left(\frac{n}{n+1}\right) \quad f_n = \frac{1}{n \ln(n)}$$

$$g_n = \sin(\pi \sqrt{4n^2+1}) \quad h_n = \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) \quad j_n = \sin\left(\frac{n^2}{n+1} \cdot \pi\right)$$

$$k_n = \frac{(-1)^n}{n \ln(n) + (-1)^n} \quad p_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad q_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

Exercice 19 — Étudier, éventuellement en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série dont le terme général est le suivant :

$$a_n = \frac{\ln^2 n}{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad b_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^3 n} \quad (\alpha \neq 1) \quad c_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$$

$$d_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n} \quad e_n = \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln n)^n} \quad f_n = \frac{\pi}{2} - \arctan(n^\alpha) \quad (\alpha > 0)$$

$$g_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \quad h_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \quad j_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

Exercice 20 — *Séries de Bertrand*

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour que la série suivante converge :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$$

Exercice 21 — Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \sin(n! \pi e)$.

On pourra écrire $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Exercice 22 — Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la nature de la série :

$$\sum [\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)]$$

Calculer sa somme en cas de convergence.

Exercice 23 — Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \ln(n)$$

Exercice 24 — Donner un équivalent en $+\infty$ de u_n et v_n avec :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad (\alpha > 1)$$

Exercice 25 —

- Donner un équivalent simple de $\frac{\ln(2n)}{2n} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$.
- Encadrer $\sum_{k=n}^{n+p} \frac{\ln(k)}{k^2}$ à l'aide d'intégrales.
- Prouver la convergence de $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^2}$ et donner un équivalent du reste.

Exercice 26 — On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{n}$.

- Montrer que $\sum u_n$ converge. On pose alors pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
- Trouver un équivalent de R_n en $+\infty$.
- À l'aide d'un équivalent de $u_k - \frac{1}{k(k+1)}$, trouver un développement asymptotique de R_n de la forme :

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- En déduire un équivalent $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k(k+1)}$.

Exercice 27 — Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

- On suppose $0 < \ell < 1$. Retrouver la convergence de $\sum a_n$.
Soit $k \in]\ell, 1[$. Montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel :

$$0 < R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p \leq \frac{a_{n+1}}{1-k}$$

En déduire un équivalent de R_n .

- On suppose que $\ell > 1$. Trouver un équivalent de $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

3. On suppose que $\ell = 0$. Montrer que $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_{n+1}$.
4. On suppose $\ell = +\infty$. Montrer que $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n$.
5. Trouver des équivalents de :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}; \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln^2(k)}{k!}; \quad \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{\sqrt{k}}$$

 **Exercice 28** — Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.
- On suppose que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.
 - Justifier la convergence absolue de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n - a_{n+1})$.
 - En déduire celle de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n - a_{n+1}) B_n$.
 - Prouver enfin la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$.
- Application 1* – Établir la convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$.
- Application 2* – Étudier la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ en fonction de $(\alpha, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 29 — Règle de Raabe-Duhamel

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

- On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$ et donner la nature de $\sum u_n$.
- On suppose désormais $\alpha > 1$.
 - Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.

- b) Soient $\beta \in \mathbb{R}$ et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

- c) À l'aide des deux questions précédentes, en choisissant correctement β , montrer que $\sum u_n$ converge.

3. *Application* – Pour tout $n \geq 2$, on pose $u_n = \sqrt{(n-1)!} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.