Devoir maison n°1

– À RENDRE LE 03/09 –

Problème 1

Partie I

On note I l'intervalle $]-\infty, 1[$. Soit f la fonction définie sur I par :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \times \exp\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

On considère également l'équation différentielle :

$$(1-x)^2 y' = (2-x) y \quad (\mathcal{E})$$

1. a) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I, \quad \frac{2-x}{(1-x)^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2}$$

   b) En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.
2. a) Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.
   b) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?
3. a) Quel est le développement limité à l'ordre 2 en 1 de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$?
   b) En déduire le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
4. Justifier, sans calcul supplémentaire, que la droite $y = \mathrm{e} + 2\mathrm{e}x$ est tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f en 0.
   Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

Partie II

1. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \exp\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

   On montrera en particulier que $P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + x^2 P_n(x)$.
2. Préciser P_0, P_1 et P_2.
3. À l'aide de la formule de Leibniz, dériver n fois les deux membres de l'équation $(\mathcal{E})$ et prouver que pour tout entier positif n et tout réel x,

$$P_{n+1}(x) = \left[(2n+1)\,x + x^2\right] P_n(x) - n^2 x^2 P_{n-1}(x)$$

Partie III

Le but de cette partie est d'établir quelques propriétés des nombres $a_n = f^{(n)}(0)$.

1. Pour tout entier positif n, exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.
2. a) Préciser les valeurs de a_0, a_1, a_2. En déduire a_3.
   b) Préciser le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.
3. Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel p par $u_p = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!}$.
   a) Rappeller la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n, pour une fonction g de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ définie sur un intervalle I.
   b) Démontrer que :

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t (1-t)^p}{p!}\,\mathrm{d}t$$

   c) Prouver que la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers e.
4. Pour p et n des entiers naturels quelconques, on pose $S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$.
   a) Démontrer que $S_p(0) = u_p$ et $S_p(1) = u_{p-1} + u_p$ pour $p \geqslant 1$.
   b) Prouver que les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_p(1))_{p\in\mathbb{N}^*}$ convergent et préciser leur limite en fonction de e.
5. Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1 :

$$S_p(n+1) - (2n+2)\,S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

6. En déduire par récurrence que la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge pour tout entier naturel n.
7. Prouver que $a_n = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$ pour tout entier naturel n.

Problème 2

Les parties I, II et III sont, dans une large mesure, indépendantes.
Soit n un entier naturel non nul.

Partie I

On pose $A = (X+1)^{2n} - 1$, polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer en développant A que l'on peut écrire $A = XB$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté b_0.
2. a) Déterminer les racines de l'équation $z^{2n} = 1$.
   b) À l'aide de la technique dite *de l'angle moitié*, écrire $\mathrm{e}^{i\theta} - 1$ sour forme factorisée pour un réel θ quelconque.
   c) Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$ et les autres racines $z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}$ seront mises sous forme trigonométrique.

On pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

3. Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.
   En déduire que, si $Q_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.
4. a) En développant $B = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} (X - z_k)$, identifier b_0 et calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$.
   b) En déduire une expression simple de Q_n, puis montrer que $P_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Partie II

On travaille dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E supposé non réduit au vecteur nul. $\mathscr{L}(\mathcal{E})$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E, id_E est l'application identité de E et θ désigne l'application nulle. Par convention, pour tout $f \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$, $f^0 = \mathrm{id}_E$.

On étudie sur quelques cas particuliers, l'équation $(f + \mathrm{id}_E)^{2n} - \mathrm{id}_E = \theta$ où $f \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$ est l'inconnue.

1. Déterminer les homothéties vectorielles solutions de l'équation proposée.
2. Calculer les sommes $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $S' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.
   On pourra développer $(1+1)^{2n}$ *et* $(1-1)^{2n}$ *puis calculer* $S + S'$ *et* $S - S'$.
3. Si s est une symétrie de E, exprimer $(s + \mathrm{id}_E)^{2n} - \mathrm{id}_E$ en fonction de s et id_E.
   En déduire les symétries de E solutions de l'équation proposée.

Partie III

On travaille dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$. I_3 désigne la matrice identité et O_3 la matrice nulle.

On pose $\mathcal{G} = \left\{M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\right\}$ où $M_{a,b}$ désigne la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont on précisera la dimension et une base ; vérifier que $\mathcal{G}$ est stable par produit matriciel.

On cherche désormais à résoudre l'équation matricielle :

$$(M + I_3)^{2n} - I_3 = O_3 \quad (*)$$

avec M, matrice inconnue, dans $\mathcal{G}$.
On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soient $M = M_{a,b}$ un élément de $\mathcal{G}$ tel que $b \neq 0$, u l'endomorphisme de E canoniquement associé à M et id_E, l'application identité de E.

2. Déterminer une base (e_1') de $E_1 = \mathrm{Ker}\,(u - (a+2b)\mathrm{id}_E)$.
3. Déterminer une base (e_2', e_3') de $E_2 = \mathrm{Ker}\,(u - (a-b)\mathrm{id}_E)$.
4. Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de E ; on la note $\mathscr{B}'$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathscr{B}'$.
6. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
   Écrire P et déterminer P^{-1} en précisant les calculs.
7. Exprimer M en fonction de P, D et P^{-1}.
8. Montrer que M est solution de l'équation $(*)$ si, et seulement si, D est solution de l'équation $(*)$.
9. Déterminer toutes les matrices D solutions de l'équation $(*)$.
10. En déduire toutes les solutions de l'équation $(*)$ dans $\mathcal{G}$.