Devoir maison n°2

– À RENDRE LE 19/10 –

Problème

Le problème se compose de 4 parties. Les 3 premières parties sont totalement indépendantes entre elles. La quatrième partie utilise les résultats des parties précédentes mais peut se traiter en admettant les résultats.

Si n est un entier, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I_n la matrice identité de cet ensemble.

Si A est une matrice, on note A^T sa transposée. $\mathrm{Tr}(A)$ désigne la trace de A.

On identifie dans tout ce problème $\mathbb{R}^n$ avec l'ensemble des matrices colonnes à n lignes.

Si E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, on note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. On note E^* l'espace $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ des formes linéaires sur E.

Dans tout le problème, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère les applications suivantes :

$$\phi_A : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}\right. \qquad \tau_A : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(AM) \end{array}\right. \qquad \gamma_A : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM-MA \end{array}\right.$$

Questions préliminaires

1. Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les applications ϕ_A, τ_A et γ_A sont linéaires.
2. Donner la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$.
3. Énoncer le théorème de la base incomplète.

Partie I – Un exemple

Dans cette partie, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. La matrice B est-elle diagonalisable ?
   Si oui, proposer une base de vecteurs propres.
3. On pose :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Vérifier que la famille $\mathcal{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) Calculer $\phi_A(E_{ij})$ pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant 2$.
   c) Donner la matrice de ϕ_A dans la base $\mathcal{E}$.
   d) L'endomorphisme ϕ_A est-il diagonalisable ?
   Si oui, préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres de ϕ_A. *On rappelle qu'ici, un vecteur propre sera une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

Partie II – Réduction de l'endomorphisme ϕ_A

On se fixe maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $\phi_A(M) = \lambda M$.
   Montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de ϕ_A, c'est également une valeur propre de A.
3. Soit μ une valeur propre de A, X un vecteur colonne non nul tel que $AX = \mu X$. Soit M une matrice dont une colonne est égale à X et toutes les autres colonnes sont nulles. Montrer que M est un vecteur propre de ϕ_A.
4. Donner l'ensemble des valeurs propres de ϕ_A.
5. Montrer que si A est diagonalisable, ϕ_A l'est également.
   On pourra, à partir d'une base de vecteurs propres de A, construire une base de vecteurs propres de ϕ_A.

Partie III – Un théorème de factorisation

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(E,G)$. Le but de cette partie est de montrer que :

$$\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists w \in \mathscr{L}(F,G) \quad v = w \circ u$$

1. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $v = w \circ u$.
   Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.
2. On suppose que $\dim(E) = n$, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - p$ et $\dim(F) = r$.
   a) Justifier pourquoi on peut choisir une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E de sorte que $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
   Quelle est alors la dimension de $\mathrm{Im}(u)$?
   b) Pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, on pose $f_i = u(e_i)$.
   Montrer que la famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.
   c) On complète la famille précédente de sorte que $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ soit une base de F. On définit alors $w \in \mathcal{L}(F, G)$ par :

$$w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) \text{ si } 1 \leqslant i \leqslant p \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   Montrer que si $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$ alors $v = w \circ u$.

Partie IV – Une caractérisation des matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que la matrice A est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $A^p = 0$.

1. Montrer que si λ est valeur propre (éventuellement complexe) de A, alors, pour tout entier naturel non nul k, λ^k est une valeur propre de A^k.
2. On suppose A nilpotente.
   a) Montrer que la seule valeur propre de A est 0.
   b) Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
3. On suppose toujours A nilpotente.
   a) Soit M une matrice telle que $AM = MA$.
   Montrer que la matrice AM est encore nilpotente.
   b) En déduire que $\mathrm{Ker}(\gamma_A) \subset \mathrm{Ker}(\tau_A)$.
   c) i – Soit $K = (k_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Vérifier que :

$$\mathrm{Tr}\left(KK^T\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}^2$$

   ii – Montrer l'implication : $\mathrm{Tr}\left(KK^T\right) = 0 \Longrightarrow K = 0$.

   iii – Prouver que l'application T définie par :

$$T : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* \\ U & \longmapsto & \tau_U \end{array} \right.$$

   est un isomorphisme.
   iv – En déduire que pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$, il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(M) = \mathrm{Tr}(UM)$$

   v – En déduire, en utilisant les résultats de la question 3.b) de cette partie et des résultats de la partie III, qu'il existe une matrice B telle que $\tau_A = \tau_B \circ \gamma_A$.
   vi – En explicitant l'égalité précédente, montrer que $\tau_A = \tau_{BA-AB}$.
   d) Montrer enfin que $A = BA - AB$ à l'aide de la question c)iv.
4. On suppose maintenant qu'il existe une matrice B telle que $A = BA - AB$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul k, $BA^k - A^kB = kA^k$.
   b) À quelle condition la matrice A^k est-elle un vecteur propre de γ_B ?
   c) En déduire que A est nilpotente en considérant le spectre de γ_B.

Exercice

On désigne par r un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.

1. a) Justifier la convergence de la série de terme général

$$u_n(r) = r^n \cos(n\theta)$$

   b) Calculer la somme de la série $\sum r^n \cos(n\theta)$.
2. On pose $f(r, \theta) = \dfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$.
   a) Justifier l'existence de $f(r, \theta)$ pour $r \in]0, 1[$ et tout réel θ.
   b) Déduire de la question précédente l'égalité :

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta)$$