Devoir maison n°2

– À RENDRE LE 29/09 –

Exercice

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs. On pose alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$$

On cherche des conditions sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

En cas de convergence, on pourra noter $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n$ la limite de la suite.

1. On suppose dans cette question que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   À quelle condition la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
2. a) À l'aide du quotient $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$, montrer que si la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle, alors $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
   b) Montrer que si la série $\sum \ln(a_n)$ converge, alors la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel non nul.
   c) On suppose dans cette question que la $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $\pm\infty$.
   Préciser dans chacun des deux cas la limite de la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans ce qui suit, on définit u_n par $a_n = 1 + u_n$.

3. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
   Montrer que la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite strictement positive si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.
4. On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ converge.
   a) Trouver un équivalent simple de $\ln(1+u_n) - u_n$ en fonction de u_n.
   b) Montrer que si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle.
   c) Montrer que si la série $\sum u_n^2$ diverge, alors la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
5. Montrer que si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle.
6. Étudier la convergence et déterminer la limite de $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ puis $a_n = 1 + (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

Problème

On considère, dans tout ce problème, un réel α supposé strictement positif. On se propose d'étudier la fonction S_α de la variable réelle x définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série de fonctions suivante :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-xn^\alpha} = 1 + \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2^\alpha x} + \mathrm{e}^{-3^\alpha x} + \mathrm{e}^{-4^\alpha x} + \cdots$$

Partie I – Premières propriétés

1. a) Justifier la convergence et expliciter la somme de $S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-xn}$.
   b) Préciser la limite et un équivalent de $S_1(x)$ quand x tend vers 0.
   c) Calculer $\lim_{x\to+\infty} S_1(x)$ et donner un équivalent de $S_1(x) - 1$ en $+\infty$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-xn^\alpha}$ converge si, et seulement si, $x > 0$.
   On suppose désormais $x > 0$.

♣ 3. a) Établir, pour tout $\varepsilon > 0$ la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} \left(x \mapsto \mathrm{e}^{-xn^\alpha}\right)$ sur $[\varepsilon, +\infty[$.
   En déduire la continuité de la fonction S_α sur $]0, +\infty[$.
   b) Comparer $S_\alpha(x)$ et $S_\alpha(y)$ pour $0 < x \leqslant y$ et préciser le sens de variation de la fonction S_α.
   En déduire que la fonction S_α admet une limite en 0 et en $+\infty$.
   c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} S_\alpha(x) = 1$.
   d) En exploitant l'inégalité $S_\alpha(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{-xn^\alpha}$ pour tous $N \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0} S_\alpha(x) \geqslant N + 1$.
   Quelle est la limite de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 ?

Partie II – Étude de la fonction S_2

On étudie dans cette partie exclusivement la fonction S_2

1. a) Établir l'inégalité suivante pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:

$$e^{-x(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} e^{-xt^2}\,dt \leqslant e^{-xn^2}$$

b) En exploitant l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire que :

$$\forall x > 0, \quad S_2(x) - 1 \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leqslant S_2(x)$$

Trouver alors $\lim\limits_{x\to 0} S_2(x)$ puis donner un équivalent de $S_2(x)$ en 0.

2. Prouver que $S_2(x) \underset{x\to+\infty}{=} 1 + e^{-x} + o(e^{-x})$ au moyen d'un encadrement où l'on fera apparaître $S_1(x)$.
En déduire un équivalent de $S_2(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.

3. a) Établir pour tout entier naturel N et tout réel $x > 0$:

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-xn^2} \leqslant \int_N^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt$$

b) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x > 0, \quad S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du \leqslant \frac{e^{-xN^2}}{2Nx}$$

c) En déduire un algorithme `Python` permettant d'obtenir une valeur approchée de $S_2(x)$ à $\varepsilon > 0$ près.

Partie III – Étude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$

1. On considère pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ les deux intégrales suivantes :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1}\,du, \quad \text{et} \quad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,dt$$

a) Montrer que l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge pour $\alpha > 0$.

b) Exprimer $\Gamma(\alpha+1)$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

c) Justifier l'existence de $I(\alpha)$ et établir une relation entre $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ et $I(\alpha)$.

2. a) Établir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$0 \leqslant S_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant 1$$

b) Trouver $\lim\limits_{x\to 0} S_\alpha(x)$ et un équivalent de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0.

3. a) Justifier pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ la relation suivante :

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du$$

b) Établir l'égalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du = e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,du$$

Montrer par ailleurs que pour tout réel $\alpha > 0$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,du \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du\right)$$

En déduire l'équivalence suivante lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

c) En conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,dt$ est négligeable devant e^{-x} lorsque x tend vers $+\infty$.

4. a) Établir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \leqslant \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,dt.$$

b) En déduire un équivalent de $S_\alpha(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.