Devoir maison n°3

– À RENDRE LE 30/11 –

Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, lorsque cela a un sens, $H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que pour $s > -1$, l'intégrale $J_s = \displaystyle\int_0^1 t^s \ln(t)\,\mathrm{d}t$ existe et donner sa valeur.
2. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction H est $\mathscr{D}_H =]-1, +\infty[$.
3. Montrer que H est monotone sur $\mathscr{D}_H$.
4. a) Montrer que $t \mapsto \dfrac{t\ln(t)}{1-t}$ est prolongeable en une fonction bornée sur $[0,1]$.
   b) En déduire, à l'aide d'un encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)$.
5. a) Démontrer que pour tout $x > -1$, $H(x) - H(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
   b) Déterminer alors un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.
   c) Soit $x > -1$.
      i – Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{(x+k)^2}$.
      ii – Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$.
      iii – En déduire que $H(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$.
6. a) Prouver que pour tout $x > -1$ et tout entier naturel k non nul,
$$\frac{1}{(x+k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{(x+t)^2} \leqslant \frac{1}{(x+k)^2}$$
   b) Déterminer un équivalent de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On considère dans cette exercice l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$ où n désigne un entier naturel. On admettra que :

$$I_0 = \frac{\pi}{2}\ ; \quad \forall n \geqslant 1 \quad I_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

On note enfin F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - x\cos^2(\theta)}}$$

1. a) Montrer que $F(x)$ est défini pour $x < 1$.
   Que se passe-t-il pour $x = 1$?
   b) Déterminer le sens de variations de F.
   c) Montrer que F est continue sur $]-\infty, 1[$.
   Le résultat de cette question est admis pour les 3/2.
2. On définit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation :
$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n t^n$$
   Expliciter α_0, α_1 et, pour $n \geqslant 2$, α_n.
   Comparer α_n et I_n.
3. a) On fixe désormais x dans $]-1, 1[$ et on pose, pour $N \geqslant 1$,
$$\frac{1}{\sqrt{1 - x\cos^2(\theta)}} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \cos^{2n}(\theta) x^n + \rho_N(\theta)$$
   Montrer que $\left|\rho_N(\theta)\right| \leqslant \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n |x|^n$.
   b) En déduire que :
$$F(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n I_n x^n + R_N \quad \text{avec} \quad |R_N| \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n |x|^n$$
   En déduire le développement en série entière de $F(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.

Exercice 3 Nombres de Bernoulli

Soit $f : z \mapsto \dfrac{z}{e^z - 1}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

1. a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
   b) Montrer que $f(z)$ tend vers une limite, notée $f(0)$, lorsque z tend vers 0. *On pensera à utiliser un développement en série entière.*

On admet que la fonction f ainsi prolongée est développable en série entière sur le disque ouvert D de centre O et de rayon 2π. Les nombres de Bernoulli sont ici définis comme les uniques nombres complexes β_n tels que l'on ait :

$$\forall z \in D \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n!} z^n$$

Pour tout réel x, on considère la fonction h_x définie sur D par $h(0) = 1$ et :

$$\forall z \in D \quad h_x(z) = \frac{z e^{xz}}{e^z - 1}$$

2. a) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la variable x, appelés polynômes de Bernoulli, telle que l'on ait :

$$\forall z \in D \quad h_x(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

   b) Donner l'expression des polynômes de Bernoulli B_n en fonction des nombres de Bernoulli β_n.
   c) Montrer que l'on a $B_n(0) = \beta_n$ pour tout entier naturel n.
   d) Comparer $f(0)$ et β_0. Quelle est la valeur de β_0 ?

3. Dans toute cette question, x est un réel quelconque et z est dans D.
   a) Démontrer que $h_{1-x}(z) = h_x(-z)$ et en déduire la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

   b) Vérifier que $h_{1+x}(z) = z e^{zx} + h_x(z)$ et en déduire la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1}$$

   Comparer alors $B_n(0)$ et $B_n(1)$.

4. On désigne par δ_{nk} le symbole de Kronecker, égal à 1 si $k = n$, à 0 sinon.
   a) Pour n et k entiers, démontrer que : $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta}\, d\theta = 2\pi\delta_{nk}$.
   b) On considère deux entiers naturels n et N vérifiant $N \geqslant n$.
      i – Montrer que, pour tout réel $r \in]0, 2\pi[$:

$$\int_0^{2\pi} h_x(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta = 2\pi r^n \frac{B_n(x)}{n!} + \int_0^{2\pi} R_N(x,\theta)\, d\theta$$

      où $R_N(x,\theta) = \displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{B_k(x)}{k!} r^k e^{i(k-n)\theta}$.
      ii – Justifier par encadrement que $\displaystyle\int_0^{2\pi} R_N(x,\theta)\, d\theta \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.
      iii – En déduire, pour tout réel $r \in]0, 2\pi[$:

$$\int_0^{2\pi} h_x\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\, d\theta = 2\pi r^n \frac{B_n(x)}{n!}$$

   ♣ c) Calculer, pour x réel et z dans D, la dérivée $\dfrac{\partial h_x}{\partial x}(z)$.
   ♣ d) En justifiant la dérivabilité de chacun des deux membres de la relation obtenue en **4.b**, démontrer pour tout réel x et pour tout entier n strictement positif, la relation :

$$B_n'(x) = n B_{n-1}(x)$$

   Les 3/2 admettront la possibilité de dériver directement sous le signe $\int$.

♣ 5. Pour tout entier naturel strictement positif n, montrer que $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\, dx = 0$.

♣ 6. Pour tout entier naturel strictement positif n, montrer que $\beta_{2n+1} = 0$.

♣ 7. a) Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que $\beta_n = B_n(1)$.
   b) En déduire que $\left(\beta_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels.
   INDICATION : *On pourra utiliser, en le justifiant, que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \beta_{n-k} = 0$.
   c) Calculer β_1, β_2 et β_3 puis $B_1(x)$ et $B_2(x)$.

Les nombres de Bernoulli sont utilisés en mécanique des fluides pour déterminer la distribution statistique des vitesses des molécules d'un gaz parfait, et plus généralement en mécanique statistique pour calculer des fonctions thermodynamiques, telle l'enthalpie, à partir de considérations à l'échelle atomique ou moléculaire.