Devoir maison n°4

– À RENDRE LE 14/12 –

Exercice 1

1. Justifier l'existence et calculer, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \,; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \,; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

2. On dispose d'une urne contenant au départ une unique boule, de couleur blanche. On possède un stock infini de boules rouges et on joue indéfiniment avec une pièce de monnaie non truquée selon le protocole suivant :

   → Si on obtient *face* au $n^{\text{ème}}$ lancer ($n \geqslant 1$), on ajoute u_n boules rouges au contenu de l'urne avant le lancer suivant de la pièce.

   → La première fois que l'on obtient *pile*, on tire au hasard une boule de l'urne et le jeu s'arrête alors.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note B_n l'événement « obtenir une boule blanche après avoir obtenu *face* les n premiers lancers et *pile* au $(n+1)$–ième » et B l'événement « obtenir une boule blanche à la fin de la partie ».

   a) Quelle est la probabilité que la partie ne s'arrête jamais ?

   b) Établir soigneusement l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(B_n) = \frac{1}{2^{n+1}} \times \left(1 + \sum_{k=1}^{n} u_k\right)^{-1}$$

   c) Exprimer l'événement B en fonction des événements B_n et en déduire une expression de $\mathbf{P}(B)$ en fonction de u_k.

   d) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(B)$ dans les cas suivants :

      (i) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite nulle ;

      (ii) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite constante égale à 1 ;

      (iii) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par $u_n = n+1$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ puis en déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

4. On reprend le jeu de la question **2.** mais la règle est maintenant la suivante :

   → Si on obtient *face* au $n^{\text{ème}}$ lancer ($n \geqslant 1$), on lance une boule rouge en direction de l'urne et on a, à chaque fois, une chance sur deux pour que cette boule tombe dans l'urne, indépendamment de ce qui a pu se produire avant, puis on effectue le lancer suivant de la pièce.

   → La première fois que l'on obtient *pile*, on tire au hasard une boule de l'urne et le jeu s'arrête alors.

   a) On suppose – dans cette question seulement – qu'on n'a pas obtenu *pile* au cours des n^{ers} tirages. Montrer que la probabilité d'avoir k boules rouges dans l'urne au cours du $(n+1)$–ième tirage vaut $\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}$.

   b) En déduire la probabilité $\mathbf{P}(B_n)$ puis montrer que la probabilité d'obtenir la boule blanche vaut $2\ln(3/2)$.

Exercice 2

On considère $N+1$ urnes numérotées de 0 à N. Pour $k \in [\![0,N]\!]$, l'urne numéro k contient exactement k boules rouges et $N-k$ boules noires.

1. Soit $k \in [\![0,N]\!]$. Combien y a-t-il d'expériences possibles consistant à tirer $n+1$ boules dans l'urne k, successivement et avec remise ? Ces expériences sont-elles équiprobables ?

On réalise l'expérience suivante : on choisit au hasard (de manière équiprobable) une urne, et l'on y effectue $n+1$ tirages successifs avec remise.

2. a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage ? Au i–ième tirage ? ($i \in [\![1,n+1]\!]$).

   b) Soient i et j deux entiers distincts dans $[\![1,n+1]\!]$. Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au i–ième tirage et au j–ième tirage.

   c) Les événements « obtenir une boule rouge au i–ième tirage » et « obtenir une boule rouge au j–ième tirage » sont-ils indépendants ?

d) Calculer la probabilité d'avoir choisi l'urne numéro k sachant que l'on n'a tiré que des boules noires.

3. a) Calculer la probabilité p_n d'obtenir une boule rouge au $n+1$–ième tirage, sachant que l'on a obtenu n boules rouges auparavant.

   b) Déterminer la limite de p_n lorsque l'on fait tendre N vers $+\infty$.

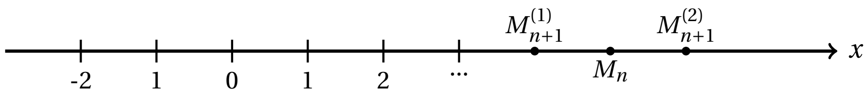
   c) Plus généralement, calculer la probabilité q_n d'obtenir m boules rouges au cours des tirages $n+1$, $n+2$, …, $n+m$ sachant que l'on a obtenu n boules rouges auparavant.
   Déterminer la limite de q_n lorsque l'on fait tendre N vers $+\infty$.

Problème

Une puce se déplace dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct que l'on notera $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. À $t=0$, elle est située en O. Puis, à chaque instant entier $t=n$, elle se trouve en un point $M_n(x_n,y_n,z_n)$ de coordonnées entières. Elle passe avec équiprobabilité à l'un des huit points obtenus en faisant varier x_n, y_n et z_n de ± 1.

Partie I – Problème unidimensionnel et probabilité du retour à l'origine

Dans cette partie, et dans cette partie seulement, on supposera que la puce se déplace par sauts successifs de longueur ± 1 le long d'un axe gradué. On suppose toujours qu'elle est située à l'origine en $t=0$.



Déplacements possibles de la puce entre les instants n et $n+1$

Soit X_n l'événement « la puce est située en O à l'instant $t=2n$ ».

1. Préciser le nombre de déplacements à gauche noté g et le nombre de déplacements à droite noté d pour que la puce se situe en O à l'instant $t=2n$?
2. On représente chaque déplacement de ce type par un mot constitué de g lettres G et de d lettres D. Combien y a-t-il de mots possibles ?
3. En déduire la probabilité $\mathbf{P}(X_n)$ que la puce soit située en O à l'instant $2n$.

Partie II – Problème tridimensionnel

On suppose désormais que la puce se déplace dans l'espace conformément aux règles établies en début de problème. On note toujours X_n l'événement « la puce est située en O à l'instant $t=2n$ ».

Déterminer $\mathbf{P}(X_n)$ à l'aide de la partie **I** en considérant les axes (Ox), (Oy) et (Oz).

Partie III – Étude asymptotique du retour à l'origine

On pose pour $n \geqslant 0$, $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{4^n}\dbinom{2n}{n}$.

1. Calculer $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
2. Montrer alors que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{8n^2}$.
   En déduire la nature de $\sum v_n$.
3. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite notée ℓ, qu'on ne cherchera pas à déterminer.
4. Montrer que $\mathbf{P}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell^3}{n^{3/2}}$.

Partie IV – Lemme de Borel-Cantelli

On considère dans cette partie un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements.

1. Montrer que l'événement B « une infinité d'événements A_n se réalisent » s'écrit : $B = \displaystyle\bigcap_{k=0}^{+\infty}\bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p$.
2. On suppose que la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge.
   a) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}(B) \leqslant \mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p\right)$.
   b) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}(B) \leqslant \displaystyle\sum_{p=k}^{+\infty}\mathbf{P}\left(A_p\right)$.
   c) En déduire que $\mathbf{P}(B)=0$. Interpréter.
3. Interpréter ce résultat dans le cas du retour de la puce à l'origine.