Devoir maison n°4

– À RENDRE LE 30/11 –

Problème 1

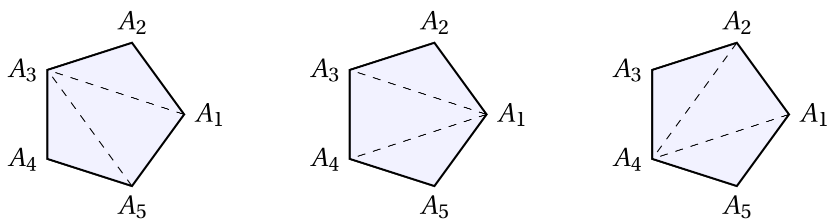
Partie I – Triangulation d'un polygone

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On note $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}$ $n+2$ points distincts du plan. Ces points sont, dans cet ordre, les sommets d'un polygone convexe, c'est-à-dire un polygone qui vérifie la propriété :

> « *En convenant que $A_{n+3} = A_1$, pour tout côté A_iA_{i+1} du polygone, tous les sommets du polygone autres que A_i et A_{i+1} sont du même côté de la droite joignant A_i à A_{i+1}.* »

On appelle diagonale du polygone tout segment joignant deux sommets non consécutifs. On trace un certain nombre de ces diagonales de manière à découper le polygone en triangles. Aucune de ces diagonales ne doit s'intersecter à l'intérieur du polygone. Pour $n \geqslant 2$, on note a_n le nombre de découpages possibles du polygone à $n+2$ sommets. On pose $a_0 = a_1 = 1$.

Voici trois configurations possibles pour $n = 3$ (il y en a d'autres) :



1. Calculer a_2 et vérifier que $a_3 = 5$.
2. Pour $n = 4$, combien y-a-t-il de découpages possibles du polygone dans lesquels figure le triangle $A_1A_2A_3$? le triangle $A_1A_2A_4$? le triangle $A_1A_2A_5$? le triangle $A_1A_2A_6$? En déduire la valeur de a_4.
3. En considérant successivement les triangles $A_1A_2A_{k+3}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ d'un polygone convexe à $n+3$ sommets, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

Partie II – Étude d'une série génératrice

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ que l'on suppose strictement positif. On note S la fonction définie sur $]-R, R[$ par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Établir pour tout $x \in]-R, R[$ l'égalité

$$xS(x)^2 = S(x) - 1$$

2. En déduire une expression de $S(x)$ en fonction de x (uniquement) sur un intervalle à préciser.
3. Donner le développement en série entière de $\sqrt{1-4x}$.
4. En déduire le rayon de convergence R de la série et l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

Partie III – Recherche d'un équivalent

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{1+\frac{n}{2}}}$$

1. Établir l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer I_0 et I_1.
2. a) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \quad (*)$$

   c) En déduire que I_{n+1} est équivalent à I_n quand $n \longrightarrow +\infty$.

3. En utilisant la relation $(*)$, montrer que $(n+1)I_{n+1}I_n$ est une constante que l'on explicitera. En déduire un équivalent de I_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$.
4. a) En utilisant de nouveau la relation $(*)$, exprimer I_{2n} en fonction de n.
   b) En déduire que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}\, n^{3/2}}$.

Les nombres a_n sont appelés nombres de Catalan, ils interviennent fréquemment dans des problèmes de combinatoire et apparaissent notamment en informatique.

Problème 2

Soit $f : z \mapsto \dfrac{z}{e^z - 1}$ la fonction de variable complexe z.

1. a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f puis montrer que $f(z)$ tend vers une limite finie lorsque z tend vers 0.

   On admet que la fonction f ainsi prolongée est développable en série entière sur le disque ouvert D de centre O et de rayon 2π. Les nombres de Bernoulli sont ici définis comme les uniques nombres complexes β_n tels que l'on ait :

$$\forall z \in D \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n!} z^n$$

   Pour tout réel x, on considère la fonction h_x définie sur D par $h(0) = 1$ et :

$$\forall z \in D \quad h_x(z) = \frac{z e^{xz}}{e^z - 1}$$

2. a) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la variable x, appelés polynômes de Bernoulli, telle que l'on ait :

$$\forall z \in D \quad h_x(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

   b) Donner l'expression des polynômes de Bernoulli B_n en fonction des nombres de Bernoulli β_n.
   c) Montrer que l'on a $B_n(0) = \beta_n$ pour tout entier naturel n.
   d) Comparer $f(0)$ et β_0. Quelle est la valeur de β_0 ?
3. Dans toute cette question, x est un réel quelconque et z est dans D.
   a) Démontrer que $h_{1-x}(z) = h_x(-z)$ et en déduire la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

   b) Vérifier que $h_{1+x}(z) = z e^{zx} + h_x(z)$ et en déduire la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1}$$

   Comparer alors $B_n(0)$ et $B_n(1)$.
4. On désigne par δ_{nk} le symbole de Kronecker, égal à 1 si $k = n$, à 0 sinon.
   a) Pour n et k entiers, démontrer que : $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta}\, d\theta = 2\pi\delta_{nk}$.
   b) Soit n un entier naturel. Montrer que, pour tout réel $r \in]0, 2\pi[$:

$$\int_0^{2\pi} h_x\left(r e^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\, d\theta = 2\pi r^n \frac{B_n(x)}{n!}$$

   c) Calculer, pour x réel et z dans D, la dérivée $\dfrac{\partial h_x}{\partial x}(z)$.
   d) En justifiant la dérivabilité de chacun des deux membres de la relation obtenue en **4.b**, démontrer pour tout réel x et pour tout entier n strictement positif, la relation :

$$B_n'(x) = n B_{n-1}(x)$$

   Les 3/2 admettront la possibilité de dériver directement sous le signe $\int$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\, dx = 0$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\beta_{2n+1} = 0$.
7. a) Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que $\beta_n = B_n(1)$.
   b) En déduire que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels.

   INDICATION : *On pourra utiliser, en le justifiant, que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \beta_{n-k} = 0$.
   c) Calculer β_1, β_2 et β_3 puis $B_1(x)$ et $B_2(x)$.

Les nombres de Bernoulli sont utilisés en mécanique des fluides pour déterminer la distribution statistique des vitesses des molécules d'un gaz parfait, et plus généralement en mécanique statistique pour calculer des fonctions thermodynamiques, telle l'enthalpie, à partir de considérations à l'échelle atomique ou moléculaire.