Devoir maison n°5

– À RENDRE LE 21/01 –

Dans tout le problème, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Pour tout entier naturel n, on note E_n le sous-espace de E formé par les polynômes de degré au plus égal à n. Selon l'usage, on convient d'identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.
L'espace E_n est muni de sa base canonique $\mathscr{B}_n = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Les coefficients binomiaux sont notés $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Partie I – Étude d'un endomorphisme

Étant donné un polynôme P de E, on définit le polynôme $\phi(P)$ par :

$$\phi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'$$

1. Justifier qu'on a ainsi défini un endomorphisme de E.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, le sous-espace vectoriel E_n est stable par ϕ.
   On notera désormais φ_n l'endomorphisme de E_n induit par ϕ sur E_n :
   $$\forall P \in E_n \quad \varphi_n(P) = \phi(P)$$
3. Dans cette question, on suppose que n est égal à 3.
   a) Écrire la matrice M_3 de φ_3 dans la base canonique de E_3.
   b) Justifier que φ_3 est diagonalisable.
   c) Déterminer une base de E_3 diagonalisant φ_3, formée de polynômes de coefficients dominants égaux à 1.
4. On revient au cas général d'un entier naturel n quelconque.
   a) Montrer que la matrice M_n de φ_n dans la base canonique est triangulaire supérieure et préciser ses coefficients diagonaux.
   b) En déduire que φ_n est diagonalisable et préciser les dimensions de ses sous-espaces propres.

Partie II – Étude d'une famille de polynômes

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme L_n par :

$$L_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$$

1. Calculer sous forme simplifiée les polynômes L_0, L_1, L_2 et L_3.
2. Calculer $L_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le degré de L_n en fonction de n ($n \in \mathbb{N}$) et donner son coefficient dominant sous la forme d'une somme.
4. En utilisant un changement d'indice, montrer que L_n a même parité que n.
5. Vérifier, à l'aide de la formule de Leibniz, que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad L_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\left[(X^2-1)^n\right]$$
6. En déduire explicitement le coefficient dominant de L_n, puis la relation :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$
7. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ |L_n(x)| \leqslant \left(\dfrac{1+|x|}{2}\right)^n \dbinom{2n}{n}$.
8. On définit, pour tout entier naturel n, le polynôme $U_n = (X^2-1)^n$.
   a) Vérifier que $(X^2-1)U_n' = 2nXU_n$.
   b) En dérivant $n+1$ fois cette relation, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \phi(L_n) = n(n+1)L_n$$

Partie III – Définition d'un produit scalaire

On pose :

$$\forall (P,Q) \in E^2 \quad \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Justifier que l'on a ainsi défini un produit scalaire sur E.

Dans toute la suite du problème, l'espace E et ses sous-espaces E_n ($n \in \mathbb{N}$) seront systématiquement munis de ce produit scalaire.

2. a) Montrer que :

$$\forall (P,Q) \in E^2 \ \ \langle \phi(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2)P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x$$

 b) En déduire que la matrice de φ_n dans toute base orthonormale est symétrique. Qu'en déduire sur l'endomorphisme φ_n ?

 c) En déduire, à l'aide d'un résultat de la partie II], que les polynômes L_p ($p \in \mathbb{N}$) sont deux à deux orthogonaux.

3. Soit n un entier naturel.

 a) Établir par récurrence sur k que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad \langle Q, L_n\rangle = \frac{(-1)^k}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[Q(x)]\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\left[(x^2-1)^n\right]\mathrm{d}x$$

 b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L_n est orthogonal à E_{n-1}.

 c) Retrouver ainsi que les polynômes L_p ($p \in \mathbb{N}$) sont deux à deux orthogonaux.

4. a) À l'aide de **III]3.a)**, exprimer, pour tout entier naturel n, $||L_n||^2$ en fonction de $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,\mathrm{d}x$.

 b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} = -\frac{2n+2}{2n+3} I_n$$

 c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_n faisant intervenir des factorielles.

 d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ ||L_n|| = \sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$.

5. Donner, pour tout entier naturel n, une base orthonormée de E_n.

Partie IV – Une relation de récurrence

Soit n un entier naturel non nul.

1. Calculer le coefficient de X^{n+1} dans $(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n$.
2. En déduire l'existence et l'unicité de $n+1$ réels α_k tels que :

$$(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k$$

3. Montrer que : $\forall k \in [\![0,n]\!] \ \ \alpha_k = -(2n+1)\dfrac{\langle XL_n, L_k\rangle}{||L_k||^2}$.
4. Pour tout $k \in [\![0,n-2]\!]$, vérifier que $\langle XL_n, L_k\rangle = \langle L_n, XL_k\rangle$ puis montrer que $\alpha_k = 0$.
5. Par des considérations de parité, montrer que $\alpha_n = 0$.
6. En utilisant la valeur des polynômes L_k au point 1, déterminer alors α_{n-1}.
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n + nL_{n-1} = 0$$

Partie V – Fonction génératrice

On fixe un réel t et on considère la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} L_n(t)x^n$, de la variable réelle x.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1+|t|}{2}\right)^n \binom{2n}{n} x^n$$

2. En déduire que le rayon de convergence R_t de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} L_n(t)x^n$ est strictement positif. On minorera R_t, sans chercher à le calculer.
 On note S_t la somme de cette série entière :

$$\forall t \in]-R_t, R_t[\quad S_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(t)x^n$$

3. En utilisant le résultat de la question IV]7, montrer que S_t est solution sur $]-R_t, R_t[$ de l'équation différentielle suivante, d'inconnue y fonction de x :

$$(\mathcal{E}_t) \quad (1-2tx+x^2)y'(x) + (x-t)y(x) = 0$$

4. Pour $|t| < 1$, en déduire l'expression de $S_t(x)$ en fonction de x.