Devoir maison n°6

– À RENDRE LE 15/02 –

Dans ce problème, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à deux. Toutes les matrices considérées dans ce problème sont à coefficients réels.
Si A est une matrice carrée, le terme situé sur la ligne i et la colonne j de A sera noté $A_{i,j}$. Si C est une matrice colonne, son terme situé sur la ligne i sera noté C_i.
Si L est une matrice ligne, son terme situé sur la colonne j sera noté L_j.

Partie I – Une norme matricielle

Dans cette partie, toutes les matrices considérées sont carrées d'ordre $N-1$.

Si A est une matrice, on pose $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N-1} \sum\limits_{j=1}^{N-1} |A_{i,j}|$.

1. Exemple. Calculer $\|A\|$ pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 7 & -6 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Montrer les résultats suivants :
   a) Pour toutes matrices A et B, $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.
   b) Pour toute matrice A et tout réel λ, $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$.
   c) Pour toute matrice A, $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$.
3. Si A et B sont des matrices, majorer $\|AB\|$ à l'aide de $\|A\|$ et de $\|B\|$.
4. En déduire que pour toute matrice A, et tout entier naturel n, $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$.

Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices et A une matrice. On dira que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers A si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|A_n - A\| = 0$ et on notera $A = \lim\limits_{n\to+\infty} (A_n)$.

5. Montrer qu'une suite de matrices carrées $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice carrée A si et seulement si, chaque suite des coefficients de A^n converge, lorsque n tend vers $+\infty$, vers le coefficient correspondant de A.

Le reste de cette partie consiste à étudier un exemple fondamental. On notera I la matrice unité (dont les termes diagonaux valent 1 et dont les autres coefficients sont nuls).

Soit A une matrice vérifiant $\|A\| < 1$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} A^k$.

6. Soit C une matrice colonne à $N-1$ lignes telle que $AC = C$. En considérant C_i où $i \in [\![1, N-1]\!]$ tel que $|C_i| = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant N-1} |C_k|$, montrer que C est nulle. Que peut-on en déduire concernant l'inversibilité de la matrice $I - A$?
7. Justifier que $(I-A)S_n = I - A^{n+1}$.
8. Montrer que la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle et en déduire que la suite de matrices $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est $(I-A)^{-1}$.

Partie II – Évolution probabiliste d'une maladie

Jusqu'à la fin du problème, on étudie l'évolution d'une maladie au sein d'une population de N individus au cours des semaines supposées indexées par $\mathbb{N}$ à partir de la semaine 0. On fera les hypothèses suivantes :

- il existe un espace probabilisé $\mathscr{E} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre d'individus malades la n-ème semaine définit une variable aléatoire sur $\mathscr{E}$ notée X_n pour laquelle $X_n(\Omega) \subset [\![0, N]\!]$;
- le nombre de malades, une semaine donnée, ne dépend que du nombre de malades la semaine précédente. Plus formellement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ de $[\![0, N]\!]$,
$$\mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) = \mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$$
- il existe un réel p dans $]0,1[$, qualifié de *facteur de résistance*, tel que pour une personne saine, au contact de i malades avec $i \in \mathbb{N}$, la probabilité de rester saine est p^i ;
- un individu atteint de la maladie à la n-ème semaine, n'est plus malade à la $(n+1)$-ème semaine ;
- des personnes saines tombent malades ou restent saines de façon indépendante.

La matrice ligne à $N+1$ colonnes $\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) & \mathbf{P}(X_n = 1) & \cdots & \mathbf{P}(X_n = N) \end{pmatrix}$ sera notée $L^{(n)}$.

1. En supposant que $\mathbf{P}(X_n = i) > 0$, justifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, pour tous i et j de $[\![0, N]\!]$,
$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} \dbinom{N-i}{j} \left(1 - p^i\right)^j p^{i(N-i-j)} & \text{si } i + j \leqslant N \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Dans la suite, on notera P la matrice carrée d'ordre $N+1$ dont le terme situé sur la ligne $i+1$ et la colonne $j+1$ est $P_{i+1,j+1} = \mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$.

2. Que valent alors l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y_i avec $Y_i(\Omega) \subset \mathbb{N}$ définie par $\mathbf{P}(Y_i = k) = \mathbf{P}(X_{n+1} = k | X_n = i)$ pour $0 \leqslant k \leqslant N-i$ (avec i fixé) ?
3. Montrer que la matrice P est de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline & & & & 0 \\ C & & Q & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   où C est une matrice colonne à $N-1$ lignes que l'on déterminera et Q est la matrice carrée d'ordre $N-1$ dont le terme situé sur la ligne i et la colonne j est $P_{i+1,j+1}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L^{(n+1)} = L^{(n)}P$ et en déduire $L^{(n)}$ en fonction de P, n et $L^{(0)}$.
5. Exemple pour $N = 2$. Montrer que pour $n \geqslant 1$, P^n est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_n & y_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   avec $x_n + y_n = 1$ et en déduire la loi de X_n en fonction de a, b, c et n où l'on a noté $L^{(0)} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.

Partie III – Temps d'éradication de la maladie

Dans cette partie, on suppose que pour i entier dans $[\![0, N]\!]$, on a $\mathbf{P}(X_0 = i) > 0$. On rappelle que l'on définit une probabilité $\mathbf{P}_i$ sur $\mathscr{E}$ par :

$$\forall A \in \mathscr{A}, \quad \mathbf{P}_i(A) = \mathbf{P}(A | X_0 = i)$$

Toutes les probabilités utilisées par la suite sont relatives à $\mathbf{P}_i$.
On note $T = \min\{n \in \mathbb{N} ; X_n = 0\}$ et on admet que T définit une variable aléatoire sur $\mathscr{E}$, représentant le temps d'éradication de la maladie. On se propose de montrer que $\mathbf{P}_i(F) = 1$ où F correspond à l'événement « T est fini ». Autrement dit, on va montrer que T prend presque sûrement une valeur finie.

1. Dans cette question, $i = 0$; justifier que $\mathbf{P}_i(T = 0) = 1$.
2. Dans cette question, $i = N$; quelle est la loi de T (relativement à $\mathbf{P}_i$) ?

Dans la suite du problème, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $C^{(n)}$ la matrice colonne à $N-1$ lignes dont le terme situé sur la ligne i, pour $1 \leqslant i \leqslant N-1$, est $\mathbf{P}_i(T = n)$.

3. Soit n un entier supérieur à deux. Montrer que pour $1 \leqslant i \leqslant N-1$:

$$\mathbf{P}(T = n | X_0 = i) = \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{P}(T = n | X_1 = k, X_0 = i)\mathbf{P}(X_1 = k | X_0 = i)$$

4. En déduire que pour n entier supérieur à 1, $C^{(n)} = QC^{(n-1)}$ (où Q est définie dans la partie précédente).
5. Montrer que $\|Q\| < 1$.
6. Montrer que $(I - Q)U = C$ où U est la matrice colonne à $N-1$ lignes constituées de 1 et où C est définie dans la partie précédente.
7. Montrer que la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}_i(T = n)$ converge, calculer sa somme et en déduire que T prend presque sûrement une valeur finie pour tout i de $[\![1, N-1]\!]$.