Devoir maison n°7

– À RENDRE LE 22/03 –

Exercice 1

Un individu joue avec une pièce non nécessairement symétrique. On note p la probabilité d'obtenir pile et on suppose seulement $p \in]0,1[$. Dans un premier temps, il lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois pile. On note N le nombre de lancers nécessaires. Dans un deuxième temps, il lance N fois cette même pièce et on note X le nombre de piles obtenus au cours de cette seconde série de lancers.

1. Préciser la loi de N, et la loi conditionnelle de X sachant $N = n$.
   En déduire la loi du couple (N, X).
2. On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

   Donner l'expression de la dérivée $k^{\text{ième}}$ de f pour tout $k \geqslant 0$.
   En déduire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$ au voisinage de 0 pour $k \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que la loi de X est donnée par :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(X=k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X=0) = \frac{1-p}{2-p}.$$

4. Soit $\lambda \in]0,1[$, U une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre λ et V une variable aléatoire géométrique de paramètre λ indépendante de U. On note $Y = UV$.
   a) Sans calculer sa loi, calculer l'espérance de Y.
   b) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{P}(Y = k)$. *On traitera séparément le cas* $k = 0$.
   c) Calculer la variance de Y.
5. En déduire que X a même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une étant une variable de Bernoulli et l'autre une variable géométrique de même paramètre.

Exercice 2

On considère les applications φ et f définies par :

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. a) Montrer que φ est une fonction définie sur $]0,+\infty[$.
   b) Montrer que φ est continue sur $]0,+\infty[$ puis à l'aide d'un encadrement, montrer qu'elle peut être prolongée par continuité en 0.
   c) Établir que φ admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et la calculer en posant $t = 1/u$.
2. a) Établir, pour tout $u \geqslant 0$, l'inégalité :

$$\ln(1+u) \leqslant \sqrt{u}$$

   b) Montrer que f est une fonction définie de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
   c) Soit $A > 0$. Montrer que f est continue sur $[0, A]$.
   En déduire que f est continue sur $[0,+\infty[$.
3. a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\varepsilon,+\infty[$.
   En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
   b) Pour $x \neq 0$, décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle en t :

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}$$

   c) En déduire l'expression de $f'(x)$ pour $x > 0$.
4. En déduire que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \ln\left(1+x^2\right) - \varphi(x)$$

   Donner un équivalent de f en $+\infty$.
5. a) Établir l'inégalité pour $u \geqslant 0$:

$$\ln(1+u) \geqslant \frac{u}{1+u}$$

b) Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant f'(x)$$

c) f est-elle dérivable en 0 ?
La courbe représentative de f admet-elle une tangente en 0 ?

6. Donner l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 3

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(0) = 1$, et,

$$\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}, \quad f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$$

1. a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.
   b) Montrer que f est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

$$(x+1)(xy' - y) + y^2 = 0$$

   c) Pour tout $x \in]-1,0[$, démontrer que $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

2. Soit $g(x) = \int_0^1 (1+x)^t \, \mathrm{d}t$ pour $x \in]-1,1[$.
   a) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ puis donner une relation entre f et g.
   b) Pour tout $t \in [0,1]$, donner le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^t$ sur $]-1,1[$.
   c) Montrer que g est développable en série entière sur $]-1,1[$.
   On admettra la permutation somme/intégrale et on écrira ce développement sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, en exprimant a_k sous forme d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer en général.
   d) Calculer a_0, a_1 et a_2.
   e) Exprimer, selon la parité de l'entier $k \geqslant 1$, le signe de a_k.
   f) Montrer que pour tous $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| x^k \leqslant 1$$

   On pourra considérer $g(-x)$ et utiliser le résultat de la question ***1.c)****.*

   g) En déduire la convergence de la série $\sum |a_k|$.

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(n-2)a_{n-1} + (n-1)a_n + \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 0$$

   b) En considérant $\ln(1+x)g(x)$, montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \frac{a_k}{n-k} = 0$$

   c) Trouver ainsi a_3 en utilisant la question **2.d)**.